Simplificação de Expressões Booleanas e Circuitos Lógicos

Margrit Reni Krug

Julho/2002

Tópicos

- Revisão Álgebra Booleana
- Revisão portas lógicas
- Circuitos lógicos
  - soma de produtos
  - produto de somas
- Simplificação por postulado da Álgebra
- Simplificação por mapa de Karnaugh

Álgebra Booleana

- Variáveis só podem assumir 1 entre 2 valores
- Uso de tabelas (tabela verdade) para listar combinações de valores de entrada e os correspondentes valores de saída

Álgebra Booleana

- Proposição – todo enunciado que pode se afirmar ser verdadeiro ou falso.
- Exemplo
  - Amanhã vai chover – não constitui uma proposição, pois existe mais de duas respostas possiveis: Sim, Talvez e Não
  - Lisboa é a capital de Portugal é uma proposição

Principios da Álgebra Booleana

- Não contradição: uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa

- Terceiro excluído: uma proposição só pode tomar um dos dois valores possíveis, ou é verdadeira ou falsa, não sendo possível terceira hipótese.

Álgebra Booleana

- Operações Básicas
  - OU - Adição Lógica $F = X + Y$

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Álgebra Booleana

- Operações Básicas
  - E - Multiplicação Lógica $F = X . Y$

X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Álgebra Booleana

- Operações Básicas
  - Não - Complemento (Negação) $F = X'$ ou $F = \overline{X}$

X	F
0	1
1	0

Tabela Verdade

- Cada entrada = 1 coluna
- Cada saída = 1 coluna
- Combinações de valores que entradas podem assumir = 2^n, onde n =quantidade de variáveis de entrada

Tabela Verdade

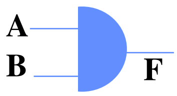
$$S = A + B . \overline{C}$$

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Portas Lógicas

Porta AND (Função Multiplicação Lógica (E))

$F = A \cdot B$



Portas Lógicas

- Portas lógicas são dispositivos ou circuitos lógicos que operam um ou mais sinais lógicos de entrada para produzir uma e somente uma saída, a qual é dependente da função implementada no circuito.

Portas Lógicas

- Um computador é constituído por uma infinidade de circuitos lógicos, que executam as seguintes funções básicas:

  a.realizam operações matemáticas

  b.controlam o fluxo dos sinais

  c.armazenam dados

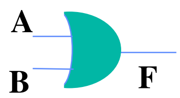
Portas Lógicas

- Naturalmente, a cada operação lógica estudada na Álgebra de Boole está associada a respectiva porta lógica.

Portas Lógicas

Porta OR (Função Adição Lógica (OU))

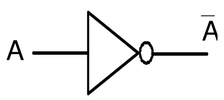
$F = A + B$



Portas Lógicas

Porta NOT (Função Negação Lógica (Complemento))

$F = \overline{A}$



Circuitos Lógicos

Definição de uma função booleana através de uma tabela-verdade

Expressão algébrica da função

- Representação
  - Produto de Somas
    - lista todas as combinações das variáveis de entrada para as quais a função de saída vale 0
  - Soma de Produtos
    - lista todas as combinações das variáveis de entrada para as quais a função de saída vale 1

Soma de Produtos

Mintermo = termo-produto no qual cada variável aparece exatamente 1 vez, complementada (se bit da tabela = 0) ou não (se bit da tabela = 1)

X	Y	Z	Termo-produto	mintermo
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m3
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m6
1	1	1	XYZ	m7

Produto de Somas

Maxtermo = termo-soma no qual cada variável aparece exatamente 1 vez, complementada (se bit da tabela = 1) ou não (se bit da tabela = 0)

X	Y	Z	Termo-soma	maxtermo
0	0	0	$X + Y + Z$	M0
0	0	1	$X + Y + \overline{Z}$	M1
0	1	0	$X + \overline{Y} + Z$	M2
0	1	1	$X + \overline{Y} + \overline{Z}$	M3
1	0	0	$\overline{X} + Y + Z$	M4
1	0	1	$\overline{X} + Y + \overline{Z}$	M5
1	1	0	$\overline{X} + \overline{Y} + Z$	M6
1	1	1	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$	M7

Notações

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Soma de Produtos

$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ = m0 + m2 + m5 + m7 = \Sigma m\ (0,2,5,7)$

Produto de Somas

$F = (X + Y + \overline{Z})\ (X + \overline{Y} + \overline{Z})\ (\overline{X} + Y + Z)\ (\overline{X} + \overline{Y} + Z) = M1 \,.\, M3 \,.\, M4 \,.\, M6 = \Pi\ M(1,3,4,6)$

Simplificação de Expressões Booleanas

- Usada para economizar componentes, tornar o circuito mais rápido, mais simples de fabricar e de manutenir, além de diminuir seu tamanho.
- Tipos:
  - Postulados da Álgebra Booleana
  - Mapas de Karnaugh

Postulados da Álgebra Booleana

- Identidades Booleanas

$A + 0 = A$ 1	$A . 0 = 0$ 5	$\overline{\overline{A}} = A$ 9
$A + 1 = 1$ 2	$A . 1 = A$ 6	
$A + \overline{A} = 1$ 3	$A . \overline{A} = 0$ 7	
$A + A = A$ 4	$A . A = A$ 8	

- Propriedade Comutativa

$A + B = B + A$ 10 $\qquad$ $A . B = B . A$ 11

Postulados da Álgebra Booleana

- Propriedade Associativa
  $(A + B) + C = A + (B + C)$ 12 $(A.\,B)\,.\,C = (B.\,C)\,.\,A$ 13
- Propriedade Distributiva
  $A\,.\,(B + C) = A\,.\,B + A\,.\,C$ 14
- Teorema de De Morgan
  $\overline{A\,.\,B...} = \overline{A} + \overline{B} + ...$ $\overline{A + B + ...} = \overline{A}\,.\,\overline{B}\,...$

Expressões Auxiliares

$A + A\,.\,B = A$ $\overline{A} + A\,.\,\overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A} + \overline{A}\,.\,\overline{B} = \overline{A}$	$A + \overline{A}\,.\,B = A + B$ $\overline{A} + A\,.\,B = \overline{A} + B$ $A + \overline{A}\,.\,\overline{B} = A + \overline{B}$	$\overline{A} + \overline{A}\,.\,B = \overline{A}$ $A + A\,.\,\overline{B} = A$
$(A + B)\,.\,(A + C) = A + B\,.\,C$		

Simplificação pelos Postulados da Álgebra Booleana

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (14), $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (4), $\overline{C} + C = 1$

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Pela prop. (6), $\overline{A}B \cdot 1 = \overline{A}B$

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada

Simplificação pelos Postulados da Álgebra Booleana

O termo $\overline{A}B\overline{C}$ **poderia ter sido simplificado com o termo** $AB\overline{C}$

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Utilizando a propriedade (3), que permite a seguinte manipulação:

$$\overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

Simplificação pelos Postulados da Álgebra Booleana

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$$

Pela prop. (3), $\overline{A}B\overline{C} = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B\overline{C}$

Pela prop. (14)

$$F = \overline{A}B(\overline{C} + C) + A\overline{B}C + (A + \overline{A})B\overline{C}$$

Pela prop. (4)

$$F = \overline{A}B \cdot 1 + A\overline{B}C + 1 \cdot B\overline{C}$$

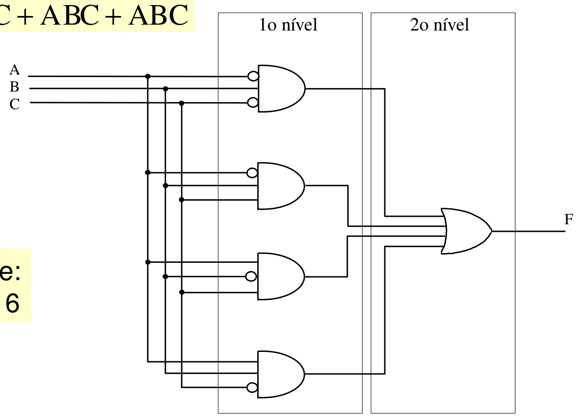
Pela prop. (6)

$$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$$

Soma de Produtos simplificada (mínima, no caso)

Circuito Lógico

$$F = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

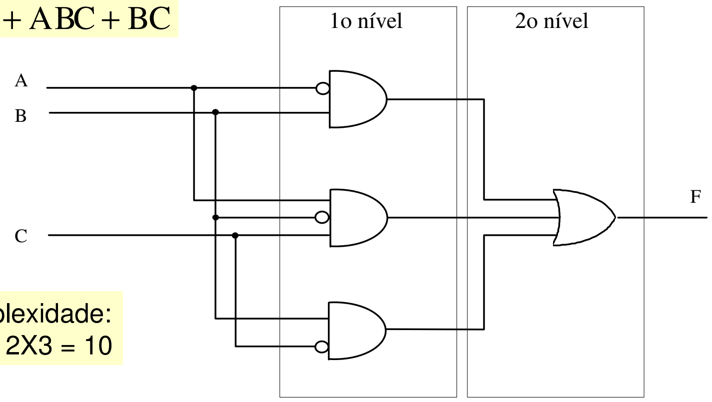


Complexidade:
4x3 + 1x4 = 16

Soma de mintermos → **Circuito com (lógica de) 2 níveis**

Circuito Lógico Expressão Simplificada

$F = \overline{A}B + A\overline{B}C + B\overline{C}$



Complexidade:
2x2 + 2X3 = 10

Soma de produtos (simplificada) → **Circuito com (lógica de) 2 níveis**

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Cada célula corresponde a um mintermo
- Representa a função como soma de produtos
- Para 2 variáveis

X \ Y	0	1
0	$\overline{X}\overline{Y}$ m0	$\overline{X}Y$ m1
1	$X\overline{Y}$ m2	XY m3

- **Exemplo:**

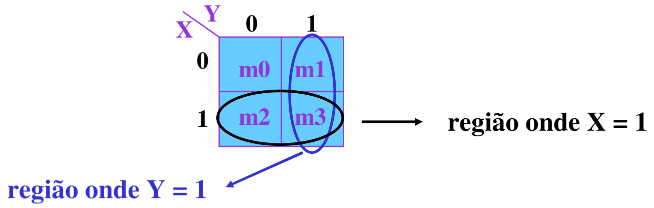
$F = \Sigma m(1,2,3) = X\overline{Y} + XY + \overline{X}Y$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Simplificação algébrica é de difícilautomatização
- Simplificação por mapa fornece uma maneira "visual" para a simplificação
- Baseia-se na identificação de produtos vizinhos

Simplificação por Mapa de Karnaugh



Junta-se 2^n posições

$2^0 = 1$ **$2^3 = 8$**
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Mapa com 3 variáveis

X \ YZ	00	01	11	10
0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

Concatenar bit da linha com bits da coluna para identificar mintermo

- **Mintermos não seguem a ordem crescente => útil para simplificação**
- **2 células vizinhas (adjacentes): mintermos diferem por uma variável**

m5 e **m7**

$X\overline{Y}Z$ XYZ

única diferença é Y

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Atenção para a vizinhança entre bordas

X \ YZ	00	01	11	10
0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

m0 $\longleftrightarrow$ **m2**

m4 $\longleftrightarrow$ **m6**

- Região com 2 células adjacentes termo com 2 literais...

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- **Exemplo de simplificação**

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$F = \Sigma m(2,3,4,5)$

$F = \bar{X}Y + X\bar{Y}$

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$F = \Sigma m(3,4,6,7)$

$F = YZ + X\bar{Z}$

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Mapa com 4 variáveis

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m0	m1	m3	m2
01	m4	m5	m7	m6
11	m12	m13	m15	m14
10	m8	m9	m11	m10

- **Notar adjacências através das bordas**

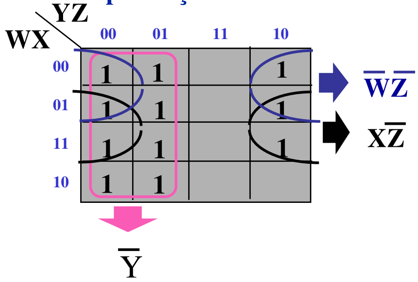
m0 ⟷ m8   **m0 ⟷ m2**

m1 ⟷ m9   **m4 ⟷ m6**

Simplificação por Mapa de Karnaugh

célula isolada	termo com 4 literais
região com 2 células	termo com 3 literais
região com 4 células	termo com 2 literais
região com 8 células	termo com 1 literal

• Exemplo de simplificação



$F = \overline{Y} + \overline{W}\overline{Z} + X\overline{Z}$

Simplificação por Mapa de Karnaugh

- Mapas com mais de 4 variáveis tornam-se difíceis de manipular

Don´t Cares

- Saída :não importa o valor da saída gerado por determinada combinação de entradas
- Entrada: é indiferente o valor da entrada para determinar um valor na saída

Funções com Saídas não Especificadas

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

- **Valor da saída não precisa ser especificado**

don’t care = X

Simplificação com Don´t Cares

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	
01	1		1	
11	X	X	X	X
10	1		X	X

• **X pode ser 0 ou 1 => o que for mais conveniente para simplificar a função**

$$F = \overline{C}\,\overline{D} + CD$$