UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10º ANO

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

Armando Machado

2001

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

1. Introdução

A actividade Matemática, tanto ao nível relativamente elementar do Ensino Básico e Secundário como a níveis mais profissionais, tem um carácter multifacetado, que inclui, por exemplo:
a) A utilização e construção de algoritmos para resolver, de modo sistemático, questões com que nos deparamos com frequência;
b) A formação das imagens mentais fecundas em que se apoia a intuição, que possibilita o ataque a problemas novos;
c) A capacidade de reconhecer semelhanças em situações aparentemente diferentes, que permitam tratá-las de modo unificado;
d) A realização de experiências que permitam formular conjecturas a serem verificadas posteriormente.

Muitos dos aspectos atrás referidos são compartilhados com outras actividades do espírito humano, em particular com as ciências com carácter mais experimental. Há, no entanto, um aspecto que, coexistindo com os restantes e não substituindo-os, é especialmente distintivo da actividade Matemática, a capacidade de clarificar conceitos e a de argumentar, isto é, a de adquirir (e transmitir) certezas a propósito da validade de certas afirmações, a partir do reconhecimento da validade de outras, normalmente mais simples. Essa capacidade de clarificar conceitos (apresentar definições) e de argumentar (exibir demonstrações), capacidade a que, de forma simplificada, daremos o nome de raciocínio lógico, ou raciocínio matemático, parece ter surgido historicamente, de forma sistemática, há mais de dois mil anos com a Escola dos geómetras gregos e desenvolve-se gradualmente ao longo da vida de muitos de nós. No entanto, num número infelizmente grande de casos, constata-se o aparecimento de bloqueamentos que impedem muitas pessoas de raciocinar correctamente em termos lógicos, mesmo em situações por muitos consideradas como extremamente simples.

Se mesmo para um estudante que foi adquirindo de forma satisfatória a capacidade de raciocinar em termos matemáticos pode ser culturalmente interessante uma reflexão sobre o modo como o raciocínio se desenvolve, pensamos que uma tal reflexão, se feita de um modo equilibrado, pode contribuir para ajudar o estudante com dificuldades em pensar matematicamente.

É uma tentativa para estimular uma reflexão sobre as bases do Raciocínio Matemático aquilo que vamos desenvolver em seguida. Trata-se de um texto com carácter introdutório, sem preocupações de carácter formal, que se justificariam, por exemplo, num curso de nível universitário. Trata-se também de um texto que contém aqui e ali algumas afirmações que, de um ponto de vista estrito, podem ser consideradas como não totalmente correctas. Pareceu-nos no entanto o compromisso possível para evitar entrar em detalhes que são delicados e incompatíveis com a maturidade matemática do estudante nesta fase. Mais do que uma exposição completa dos assuntos, o que pretendemos é dar um empurrão no bom sentido.

2. As expressões da linguagem matemática
Os conectivos lógicos

As expressões que a linguagem matemática utiliza não são essencialmente muito diferentes daquelas que utilizamos no dia a dia, quando falamos dos mais variados assuntos. Desse ponto de vista poderíamos ser levados a pensar que o estudo dessas expressões se reduziria àquilo a que damos usualmente o nome de Gramática. De facto não é isso exactamente o que se passa: Por um lado, e como será exemplificado adiante, existem por vezes pequenas diferenças entre o modo como uma frase é interpretada num contexto matemático e o significado que daríamos a uma frase análoga num contexto corrente; por outro lado o tipo de análise que interessa fazer para perceber o significado das expressões utilizadas em Matemática não é aquele que é feito usualmente no estudo da Gramática. Vamos iniciar em seguida uma análise das expressões da linguagem matemática que se revela especialmente adaptada à compreensão desta.

Há essencialmente dois tipos de expressões com significado matemático, cada um dos quais, como estudaremos mais tarde, admite uma variante.

> Chama-se *termo*, ou *designação*, a uma expressão cujo papel é nomear, ou designar alguma coisa.

Apresentamos a seguir algumas expressões que podem aparecer em contextos matemáticos e que são termos.

- 4
- o mais pequeno número primo maior que 1000
- a soma de 4 parcelas iguais a 7
- $2 \times (7 - 5)$
- o número real positivo cujo quadrado é dois
- a recta que passa pelo ponto P e é paralela à recta r

(no último exemplo supomos naturalmente que, no contexto em questão, sabemos o que são o ponto P e a recta r). O estudante não terá dificuldade em multiplicar os exemplos anteriores nem em construir exemplos de termos que intervêm em contextos não matemáticos.

> Chama-se *proposição* a uma expressão que traduz uma afirmação e à qual se pode associar um dos *valores de verdade* "verdadeiro" ou "falso".

Repare-se que, ao classificarmos uma expressão como sendo uma proposição, não estamos de modo nenhum a insinuar que ela é verdadeira. Como exemplos de proposições que podem aparecer em contextos matemáticos temos:

- $4 + 5 = 9$
- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$
- Qualquer número diferente de 0 tem um quadrado maior que 0
- 9 é um número primo
- $\sqrt{2} + \sqrt{8} < \sqrt{18}$ ou $\sqrt{18} < \sqrt{2} + \sqrt{8}$
- Existe um número natural cujo dobro é 5

(repare-se que os três primeiros exemplos são proposições verdadeiras e os três últimos são proposições falsas). Mais uma vez, o estudante não terá dificuldade em encontrar outros exemplos de proposição tanto em contextos matemáticos como noutros contextos.

Apesar de, como já referimos, uma proposição poder ser verdadeira ou falsa, há muitas situações em que ao enunciarmos uma proposição estamos a afirmar que ela é verdadeira:

> Vamos chamar *asserção* a uma proposição que foi enunciada com o objectivo de a identificar como proposição verdadeira.[1]

[1]Em rigor o conceito de asserção não pertence ao campo da Lógica, tendo apenas a ver com a intenção do autor da proposição em análise. De qualquer modo, parece cómodo utilizá-la numa exposição introdutória sobre a Lógica.

A maioria das proposições que encontramos em textos de Matemática são asserções dos seus autores. No entanto, quando em provas de "escolha múltipla" se apresentam várias proposições e se questiona sobre qual delas é verdadeira, essas proposições não são evidentemente asserções.

★ ★ ★ ★

Muitas das proposições que encontramos na prática podem ser consideradas como construídas a partir de uma, ou mais, proposições mais simples por utilização de uns instrumentos lógicos, a que se costuma dar o nome de *conectivos*, de tal modo que o valor de verdade da proposição inicial fica determinado pelos valores de verdade da, ou das, proposições mais simples que contribuiram para a sua formação. Vamos começar por examinar três desses conectivos, a *negação*, a *conjunção* e a *disjunção*, deixando para mais tarde dois outros conectivos importantes, a *implicação* e a *equivalência*, cuja compreensão é, de início, um pouco mais delicada.

> A *negação* de uma proposição é uma nova proposição que é verdadeira se a primeira for falsa e é falsa se a primeira for verdadeira.

A negação aparece muitas vezes na linguagem corrente através da utilização da palavra "não", embora por vezes ela esteja disfarçada sobre várias formas, especialmente quando combinada com outros instrumentos lógicos (pensar, por exemplo, nas palavras "nunca", ou "nem", ou em expressões menos formais como "é mentira que"). O importante é aprendermos a reconhecer na linguagem corrente a actuação deste conectivo e isso é uma coisa que, na prática, não costuma oferecer dificuldades.

Por exemplo: A proposição "7 não é maior que $2+3$"[2], que é falsa, é a negação da proposição "7 é maior que $2+3$", que é verdadeira; a proposição "não há triângulos com dois ângulos rectos", que é verdadeira, é a negação da proposição "há triângulos com dois ângulos rectos", que é falsa. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a negação de outra, escrevemo-la antecedendo esta última do símbolo de negação $\boxed{\sim}$, ou $\boxed{\neg}$, depois de, se isso for mais claro, a envolver entre parênteses. As duas negações atrás referidas seriam assim escritas na forma

$$\sim \text{(7 é maior que } 2+3)$$
$$\sim \text{(há triângulos com dois ângulos rectos).}$$

Não se fique, no entanto, com a ideia de que a utilização do símbolo lógico de negação seja preferível à utilização normal da língua portuguesa, mesmo quando se está a trabalhar num contexto matemático: A versão mais simbólica justifica-se, normalmente, apenas quando se quer sublinhar a análise da proposição enquanto negação.

Uma propriedade muito simples da negação é a chamada **lei da dupla negação**: Afirmar que a negação da negação de uma proposição é verdadeira é exactamente o mesmo que afirmar que a proposição original é verdadeira.

Por exemplo, escrevendo, como é usual, na forma "$4 \neq 3$" a negação da proposição "$4 = 3$", a proposição "$\sim (4 \neq 3)$" tem o mesmo valor de verdade que "$4 = 3$".

O segundo conectivo lógico que vamos examinar é a conjunção.

> A *conjunção* de duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira se as duas primeiras o forem e que é falsa, quer no caso em que as duas primeiras são falsas, quer no caso em que uma delas é verdadeira e a outra é falsa.

A conjunção aparece muitas vezes na linguagem corrente através da utilização da palavra "e", embora por vezes ela esteja disfarçada sob outras formas. Por exemplo: A proposição "$7 > 5$ e

[2]Com frequência colocamos entre aspas certas expressões da linguagem quando quisermos tornar claro que estamos a falar sobre essas expressões, e não sobre os objectos a que elas fazem referência.

$5 > 3$", que é verdadeira, é a conjunção das duas proposições verdadeiras "$7 > 5$" e "$5 > 3$"; a proposição "quer 11, quer 111, são números primos" é a conjunção das proposições "11 é um número primo" e "111 é um número primo", a primeira verdadeira e a segunda falsa, pelo que aquela proposição é falsa; a proposição "nem 5, nem 7, são números primos" é a conjunção das proposições falsas "5 não é um número primo" e "7 não é um número primo" e é assim uma proposição falsa. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a conjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de conjunção $\boxed{\wedge}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. As três conjunções atrás referidas seriam assim escritas na forma

$$7 > 5 \wedge 5 > 3$$
$$(11 \text{ é um número primo}) \wedge (111 \text{ é um número primo})$$
$$(5 \text{ não é um número primo}) \wedge (7 \text{ não é um número primo})$$

e, no caso da última, podemos levar a análise mais longe e escrevê-la na forma

$$(\sim (5 \text{ é um número primo})) \wedge (\sim (7 \text{ é um número primo})).$$

Examinemos agora o terceiro conectivo, a disjunção.

A *disjunção* de duas proposições é uma nova proposição que é falsa no caso em que as primeiras são ambas falsas e que é verdadeira, quer no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa, quer naquele em que as duas primeiras são ambas verdadeiras.

A disjunção aparece frequentemente na linguagem corrente assinalada pela palavra "ou". Por exemplo: A proposição "$7 > 5$ ou $3 > 4$" é a disjunção das proposições "$7 > 5$" e "$3 > 4$", a primeira verdadeira e a segunda falsa, pelo que se trata de uma proposição verdadeira; a proposição "$1 > 1$ ou $0 > 0$" é a disjunção das duas proposições falsas "$1 > 1$" e "$0 > 0$" e é portanto falsa; a proposição "$4 = 4$ ou $1 \neq 0$" é a disjunção das duas proposições verdadeiras "$4 = 4$" e "$1 \neq 0$", sendo assim uma proposição verdadeira. Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a disjunção de outras duas, escrevemo-la colocando entre estas o símbolo de disjunção $\boxed{\vee}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. As três disjunções atrás referidas seriam assim escritas na forma

$$7 > 5 \vee 3 > 4$$
$$1 > 1 \vee 0 > 0$$
$$4 = 4 \vee 1 \neq 0.$$

Observe-se que, tal como acontecia com os outros conectivos, nem sempre a palavra "ou" aparece explicitada numa disjunção enunciada em linguagem corrente. Por exemplo, se pensarmos um pouco, concluímos que a proposição "um dos números $2^3 + 1$ e $2^3 - 1$ é primo" pode ser analisada na forma

$$(2^3 + 1 \text{ é primo}) \vee (2^3 - 1 \text{ é primo}).$$

A disjunção, quando utilizada na linguagem corrente e num contexto não matemático, tem por vezes uma interpretação diferente daquela que apontámos atrás. O que se passa é que há frases disjuntivas que se pretende considerar como falsas quando as duas que contribuem para a sua formação forem verdadeiras (costuma-se então dizer que se está em presença de uma *disjunção exclusiva*). Como exemplo de frase deste tipo, podemos apontar "ou vais à praia ou vês o jogo", em que está implícita a necessidade de uma opção. Num contexto matemático, que é o que nos interessa aqui, a disjunção exclusiva não é praticamente utilizada, pelo que será cómodo considerar que o significado da disjunção é sempre aquele que apontámos inicialmente.

Reparemos que, tal como referimos ao explicar o significado da disjunção, uma disjunção de duas proposições é falsa exactamente quando as duas proposições forem falsas, ou seja quando as negações das duas proposições forem ambas verdadeiras. Dito de outro modo,

> Dizer que a **negação da disjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **conjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Por exemplo, dizer que a proposição

$$\sim (\pi = 3 \vee \pi = 4)$$

é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição

$$(\sim \pi = 3) \wedge (\sim \pi = 4),$$

a qual é escrita habitualmente na forma "$\pi \neq 3 \wedge \pi \neq 4$".

Por razões análogas se constata que

> Dizer que a **negação da conjunção** de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que a **disjunção das negações** das duas proposições é verdadeira.

Por exemplo, dizer que é falsa a afirmação "9 é primo **e** ímpar" (ou seja, que a sua negação é verdadeira) é o mesmo que dizer a afirmação "9 não é primo **ou** 9 não é ímpar" é verdadeira.

Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **primeiras leis de de Morgan**[3]. É comum uma pessoa menos atenta cometer o erro de negar uma conjunção ou disjunção sem reparar que é necessário trocar o conectivo.

Reparemos enfim que, tanto a conjunção como a disjunção, que referimos envolverem duas proposições, podem ser naturalmente estendidas ao caso em que partimos de três ou mais: A conjunção de várias proposições vai, tal como no caso de duas, ser uma nova proposição que é verdadeira quando todas o forem e vai ser falsa em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos uma for falsa); a disjunção das mesmas proposições vai ser falsa quando todas forem falsas e vai ser verdadeira em todos os outros casos (ou seja, quando pelo menos uma for verdadeira).

Exercício 1. Analise cada uma das proposições seguintes de forma a tornar claro o modo como intervêm na sua formação os conectivos lógicos de negação, conjunção e disjunção.
a) 3 é um divisor comum de 9 e 12.
b) 9 não é primo nem par.
c) 5 divide pelo menos um dos números 7 e 10.

Exercício 2. Utilize as primeiras leis de de Morgan para encontrar proposições cujo valor de verdade é o **oposto** do das seguintes:
a) π^2 é simultaneamente maior e menor que 10.
b) Vou ao cinema ou como pipocas.
c) O Carlos e o João gostam de nadar.
d) O Filipe não sabe ler ou está distraído.

★ ★ ★ ★

[3] O "de" não foi repetido por engano: O nome pelo qual é conhecido o matemático é "de Morgan".

Antes de passarmos a examinar os restantes conectivos lógicos será cómodo falarmos da variante das proposições que referimos no início. Pensemos numa afirmação do tipo "um número é maior que 5" ou "$x^2 + x - 2 = 0$". Cada uma delas, por si só, não é verdadeira nem falsa, porque não sabemos a que nos estamos a referir, no primeiro caso quando dizemos "um número" e, no segundo, quando escrevemos "x". No entanto, a primeira transforma-se numa proposição, que pode ser verdadeira ou falsa, quando substituirmos "um número" por um termo, como 7 ou $2+2$ e a segunda transforma-se numa proposição quando subsituímos x por um termo como 1 ou 2 (no primeiro caso, ficamos com a proposição verdadeira "$1^2 + 1 - 2 = 0$" e, no segundo, com a proposição falsa "$2^2 + 2 - 2 = 0$"). A uma expressão como as anteriores é costume dar o nome de *expressão proposicional* ou de *condição*, havendo também contextos, como o da segunda, em que se usa o nome alternativo de *equação*; à unidade "um número", no primeiro caso, e "x", no segundo, que se destina a ser substituída, costuma-se dar o nome de *variável* e a operação de substituir as variáveis por termos também costuma ser referida como "atribuir valores às variáveis". Em geral, podemos dizer:

> Uma *expressão proposicional*, ou *condição*, é uma expressão com variáveis que se transforma numa proposição quando se substituem essas variáveis por termos convenientes.

Cada variável tem um *domínio* (normalmente implícito no contexto em que nos situamos), isto é, um certo conjunto de objectos ao qual a variável se refere, e, para substituir essa variável por um termo, é necessário assegurarmo-nos de que esse termo designa um objecto desse conjunto. Por exemplo, quando falamos da expressão proposicional $x^2 + x - 2 = 0$, x será provavelmente uma *variável real*, isto é, uma variável destinada a ser substituída por um termo que designe um número real; não fará qualquer sentido substituir x por exemplo pelo termo João e escrever

$$\text{João}^2 + \text{João} - 2 = 0!$$

Uma expressão proposicional pode conter uma ou mais variáveis e cada variável pode aparecer uma ou mais vezes. As substituições de variáveis por termos devem ser feitas de acordo com regras que o estudante decerto já encontrou e que não terá dificuldade em aplicar. Relembrando:

> Se uma mesma variável aparecer mais que uma vez, ela deve ser substituída todas as vezes pelo mesmo termo; pelo contrário, diferentes variáveis podem ser substituídas pelo mesmo ou por diferentes termos.

Aquilo que acabamos de dizer relativamente às proposições pode ser dito, de modo análogo, relativamente aos termos. Expressões como "$x^2 + x - y$" contêm variáveis e transformam-se em termos quando se substituem essas variáveis por termos.

> Uma *expressão designatória* é uma expressão com variáveis que se transforma num termo quando se substituem essas variáveis por termos.

Voltando às expressões proposicionais, reparemos que os três conectivos que estudámos atrás, e que permitiam formar novas proposições a partir de proposições mais simples, vão permitir formar do mesmo modo novas expressões proposicionais a partir de expressões proposicionais mais simples. Por exemplo, partindo de expressões proposicionais como "x é maior que 3" e "x é menor que 5", podemos utilizando um ou mais conectivos, obter, entre outras, as expressões proposicionais

• x é maior que 3 e x é menor que 5
• x é maior que 3 ou x é menor que 5
• x é maior que 3 e x não é menor que 5.

Exercício 3. Para cada uma das expressões proposicionais seguintes encontre, se possível, substituições de variáveis que as transformem em proposições verdadeiras e em proposições falsas. Considere quer x e y são variáveis reais, ou seja que têm o conjunto dos números reais por domínio.
a) $x^2 - 3x = 4$
b) $x^2 = x\,y$
c) $x + y < x$
d) $x^2 + 1 > 0$
e) $x + 1 = x - 1$.

Embora, como já referimos, uma expressão proposicional não seja, em geral, nem verdadeira nem falsa, só tomando um desses valores de verdade quando substituímos as variáveis por termos, há certas expressões proposicionais que têm a propriedade especial de se transformarem em proposições verdadeiras, quaisquer que sejam as substituições que se façam. É o que acontece, por exemplo, com as seguintes expressões proposicionais, com variável real:

• $x \geq 0 \vee x < 0$
• $x > 3 \vee x < 5$
• $x^2 + 1 > 0$
• $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Às expressões proposicionais com esta propriedade dá-se o nome de *universais*.

Uma *expressão proposicional universal* é uma expressão proposicional que se transforma numa proposição verdadeira, qualquer que seja o modo como substituímos as suas variáveis por termos.

Referimos atrás que uma asserção é uma proposição que é enunciado pelo seu autor como sendo verdadeira. De modo análogo, diremos que uma expressão proposicional é uma *asserção* se for enunciada pelo seu autor como sendo universal. Um grande número de expressões proposicionais que aparecem num texto matemático são de facto asserções. No entanto, quando falamos, por examplo, da equação $x^2 + x - 2 = 0$, não estamos, evidentemente, a fazer uma asserção.

Uma convenção útil para uma maior economia de linguagem é considerar que, quando falarmos em geral de expressões proposicionais, admitimos que estas possam ser também proposições, olhando assim para as proposições como sendo expressões proposicionais com 0 variáveis. Dizer que uma proposição, enquanto expressão proposicional, é universal corresponde então a dizer que ela é verdadeira. Do mesmo modo, vamos considerar que os termos são expressões designatórias com 0 variáveis.

★ ★ ★ ★

O contexto das expressões proposicionais permite explicar, de forma porventura mais clara, os dois conectivos que nos falta estudar. O primeiro desses conectivos é a implicação, que costuma aparecer na linguagem corrente, entre outras, nas formas "… implica …" ou "se …, então …". Como exemplos de asserções que fazem intervir a implicação, podemos apresentar

• Se um triângulo tem dois lados iguais, então os ângulos opostos são iguais
• Se $x \times y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$
• $x > 0$ e $y > z$ implica $x \times y > x \times z$.

Em cada um dos casos a expressão proposicional é construida a partir de outras duas, o *antecedente* e o *consequente*, e o que a asserção afirma é que, quaisquer valores atribuídos às variáveis que tornem o antecedente verdadeiro, também tornam o consequente verdadeiro (por exemplo, no terceiro caso assinalado acima, o antecedente é a expressão proposicional "$x > 0$ e $y > z$" e o consequente é "$x \times y > x \times z$"). Se a implicação, no contexto das asserções que envolvem expressões proposicionais com variáveis, é algo que estamos habituados a encontrar, talvez já não seja muito claro qual o significado a dar a uma implicação cujos antecedente e consequente sejam proposições. Por exemplo, o que significará cada uma das três proposições seguintes:

• $2 > 0$ e $4 > 3$ implica $2 \times 4 > 2 \times 3$
• $2 > 0$ e $3 > 4$ implica $2 \times 3 > 2 \times 4$
• $-1 > 0$ e $3 > 4$ implica $(-1) \times 3 > (-1) \times 4$?

Apesar de estes significados não parecerem porventura muito claros, revelou-se útil, para poder encarar os diferentes tipos de asserções de um ponto de vista unificado, atribuir significado a expressões como aquelas com o objectivo de conseguir que as asserções válidas continuem a corresponder exactamente às expressões proposicionais universais. Se queremos que a asserção, que ninguém tem dúvidas em aceitar como válida,

$$x > 0 \text{ e } y > z \text{ implica } x \times y > x \times z$$

fique uma expressão proposicional universal, não podemos deixar de aceitar como verdadeiras as três proposições referidas, uma vez que elas se obtêm daquela expressão proposicional atribuindo, de diferentes modos, valores às variáveis. Repare-se que no primeiro caso o antecedente "$2 > 0$ e $4 > 3$" e o consequente "$2 \times 4 > 2 \times 3$" são ambos verdadeiros, no segundo caso o antecedente e o consequente são ambos falsos e no terceiro caso o antecedente é falso e o consequente é verdadeiro.

As considerações anteriores não explicam qual o valor de verdade que convém atribuir à implicação quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, mas é fácil de constatar que ela deve então ser considerada como falsa, o que está aliás de acordo com o modo usual de rebater uma asserção inválida como "Se $x > 1$, então $x > 5$"; se alguém nos fizesse essa asserção nós responderíamos: Nem pensar...; "$3 > 1$" é verdade e "$3 > 5$" é falsa (costuma-se dizer que a substituição de x por 3 constitui um *contraexemplo*). Resumindo:

A *implicação* entre duas proposições, uma primeira o *antecedente* e uma segunda o *consequente*, é uma nova proposição que é **verdadeira** nos casos em que

• O antecedente é verdadeiro e o consequente é verdadeiro
• O antecedente é falso e o consequente é verdadeiro
• O antecedente é falso e o consequente é falso

e é **falsa** no caso em que

• O antecedente é verdadeiro e o consequente é falso

Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a implicação entre outras duas, escrevemo-la colocando o antecedente e o consequente, por esta ordem, separados pelo símbolo de implicação $\boxed{\Rightarrow}$, depois de, se isso for mais claro, os envolver entre parênteses. Do mesmo modo que a implicação colocada entre duas proposições dá origem a uma nova proposição, quando a colocamos entre duas expressões proposicionais, obtemos uma nova expressão proposicional e é fácil de constatar que, como era nosso objectivo, uma tal expressão proposicional é válida como asserção exactamente quando for uma expressão proposicional universal. Por exemplo, as três asserções com que iniciámos o estudo da implicação, podem ser analisadas na forma

• (dois lados de um triângulo são iguais) $\Rightarrow$ (os ângulos opostos são iguais)
• $x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
• $(x > 0 \wedge y > z) \Rightarrow x \times y > x \times z$.

Reparando no modo como a implicação foi interpretada acima, constatamos que afirmar que a negação de uma implicação é verdadeira é o mesmo que afirmar que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso ou seja, dito de outro modo, que o antecedente e a negação do consequente são ambos verdadeiros. Podemos assim enunciar a seguinte

Regra da negação de uma implicação: O valor de verdade da negação de uma implicação é o mesmo que o da conjunção entre o antecedente e a negação do consequente.

Exercício 4. Utilize a regra da negação de uma implicação para encontrar expressões proposicionais, cujo valor de verdade seja o da **negação** de cada uma das seguintes:
a) Se choveu então fui ao cinema.
b) Se alguém não quer ser lobo então não lhe veste a pele.
c) $x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$.

A propósito da alínea c) do exercício anterior, é interessante reparar que, ao contrário do que acontece no caso das proposições, em que negar a verdade duma proposição é o mesmo que afirmar a verdade da sua negação, negar o facto de uma expressão proposicional ser universal não é o mesmo que afirmar que a sua negação é universal. No exemplo em questão, “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” não é universal, como se reconhece substituindo x por -1, e a negação daqiela expressão proposicional, que afirma o mesmo que “$x^2 = 1 \wedge x \neq 1$”, também não é universal, como se reconhece substituindo, por exemplo, x por 0.

A cada implicação entre duas proposições (ou expressões proposicionais) é costume associar outras três implicações:

A *implicação recíproca* é aquela cujo antecedente é o consequente da primeira e cujo consequente é o antecedente da primeira. Por exemplo, a implicação recíproca de “se choveu, então fui ao cinema” é “se fui ao cinema então choveu” e a implicação recíproca de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é “$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$”. Repare-se que uma implicação entre duas proposições e a sua recíproca não têm que ter o mesmo valor de verdade; por exemplo, quando se substitui x por -1, “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é falsa e “$x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$” é verdadeira.

A *implicação contrária* é aquela cujo antecedente é a negação do antecedente da primeira e cujo consequente é a negação do consequente da primeira. Por exemplo, a implicação contrária de “se choveu, então fui ao cinema” é “se não choveu, então não fui ao cinema” e a implicação contrária de “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é “$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$”. Repare-se que uma implicação entre duas proposições e a sua contrária não têm que ter o mesmo valor de verdade; por exemplo, quando se substitui x por -1, “$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$” é falsa e “$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$” é verdadeira.

A *implicação contrarrecíproca* é aquela cujo antecedente é a negação do consequente da primeira e cujo consequente é a negação do antecedente da primeira, por outras palavras, é a contrária da recíproca da primeira[4]. Por exemplo, a implicação contra-recíproca de “se choveu,

[4]Também é a recíproca da contrária da primeira…

então fui ao cinema" é "se não fui ao cinema então não choveu" e a implicação contra-recíproca de "$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$" é "$x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$". A implicação contra-recíproca é especialmente importante pelo facto seguinte, que resulta simplesmente de uma implicação ser falsa quando, e só quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, ou seja, quando, e só quando, a negação do consequente é verdadeira e a negação do antecedente é falsa:

> **Regra da passagem ao contrarrecíproco:** Uma implicação entre duas proposições e a implicação contrarrecíproca têm sempre o mesmo valor de verdade.[5]

Exercício 5. Para cada uma das expressões proposicionais seguintes encontre formulações para as respectivas recíproca, contrária e contrarrecíproca.
a) $x\,y = x \;\Rightarrow\; y = 1.$
b) Quem muito fala pouco acerta.

O último conectivo que nos falta referir, a equivalência, pode ser agora examinado de modo rápido, na medida em que o seu papel apresenta semelhanças com o da implicação.

> A *equivalência* entre duas proposições é uma nova proposição que é verdadeira, quer no caso em que as primeiras são ambas verdadeiras, quer no caso em que estas são ambas falsas, e que é falsa no caso em que uma das primeiras é verdadeira e a outra é falsa.

Quando queremos tornar mais claro o facto de uma proposição ser a equivalência entre outras duas, escrevemo-la separando estas pelo símbolo de equivalência $\boxed{\Leftrightarrow}$, depois de, se isso for mais claro, as envolver entre parênteses. Do mesmo modo que a equivalência colocada entre duas proposições dá origem a uma nova proposição, quando a colocamos entre duas expressões proposicionais, obtemos uma nova expressão proposicional e é nessa forma que a equivalência aparece utilizada com mais frequência na prática. Em linguagem comum a equivalência é frequentemente assinalada, entre outros modos, utilizando palavras como "é equivalente", "se, e só se," ou "é condição necessária e suficiente". Por exemplo o carácter de equivalência das asserções

- Um triângulo é equilátero se, e só se, é equiângulo
- Uma condição necessária e suficiente para que $x \times y = 0$ é que $x = 0$ ou $y = 0$

fica sublinhado se as escrevermos na forma

- (o triângulo é equilátero) $\Leftrightarrow$ (o triângulo é equiângulo)
- $x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0).$

Repare-se que, comparando o modo como se determina se uma equivalência de duas proposições é verdadeira ou falsa com o que se faz no caso duma implicação, constata-se facilmente que

> Dizer que a equivalência de duas proposições é verdadeira é o mesmo que dizer que são verdadeiras a implicação que se obtém tomando uma das proposições como antecedente e a outra como consequente e a recíproca desta[6].

[5]Analogamente se constata que a implicação recíproca e a implicação contrária têm também sempre o mesmo valor de verdade (mas não o mesmo que a implicação de partida).
[6]Ou, alternativamente a primeira implicação e a sua contrária (lembrar o que se disse na nota de pé de página número 5).

Por exemplo, dizer que "$x \times y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$" é universal é o mesmo que dizer que são universais as duas implicações

$$x \times y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0) \qquad\qquad (x = 0 \vee y = 0) \Rightarrow x \times y = 0.$$

Exercício 6. Para cada uma expressões proposicionais seguintes, analisá-la até onde for possível em termos da sua formação a partir de expressões mais simples, por utilização dos conectivos lógicos. Descrever essa análise utilizando os símbolos lógicos para os conectivos e colocar parênteses, nos casos em que isso seja útil para uma melhor legibilidade ou para evitar ambiguidades.

a) Ou $x^2 + y^2 > 0$, ou tem-se simultaneamente $x = 0$ e $y = 0$.
b) Ou $n = 1$, ou n não é divisor de 9, ou n não é divisor de 10.
c) O número x é maior que pelo menos um dos números y e z.
d) $x > 3$ ou $x < 5$.
e) Os números x e $-x$ são ambos menores que y.
f) n é múltiplo de 5 e de 7.
g) Nem x nem y são números positivos.
h) Se $x \neq y$ e x não é menor que y, então y é menor que x.
i) Se $xy = 1$ e $x \neq y$, então $x < 1$ ou $y < 1$.
j) $3x = 6$ quando $2x = 4$.
l) $x^2 = 4$ se, e só se $x = 2$.
m) Quer no caso em que $x < 0$, quer naquele em que $x > 0$, tem-se $x^2 > 0$.
n) É condição necessária e suficiente para que $xy < xz$ que seja $x < 0$ e $y < z$.
o) Se x é simultaneamente maior e menor que 0, então x^2 é menor que 0.

Exercício 7. Verificar quais das alíneas do exercício precedente são asserções válidas, isto é, são proposições verdadeiras ou expressões proposicionais universais (consideramos n como variável natural e x, y e z como variáveis reais). No caso das expressões proposicionais que não sejam universais, apresentar contraexemplos, isto é, substituições das variáveis que transformem as expressões proposicionais em proposições falsas.

Exercício 8. Um estudante menos atento utilizou os conectivos lógicos de forma incorrecta para analisar certas expressões proposicionais em linguagem corrente. Descobrir quais seriam essas expressões e explicitar uma análise correcta.

a) $x \sim\ < y$.
b) $0 < x \wedge y$.
c) $x \vee y$ é positivo.
d) $x > 0\ \sim\ \Rightarrow x > 1$.
e) O professor $\Rightarrow$ com a Marta $\wedge$ com o João.

3. As expressões da linguagem matemática Quantificadores

Consideremos, por exemplo, a proposição "O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a 0". Trata-se de uma expressão da linguagem matemática que se sente claramente que pode ser considerada como construída a partir de algo mais simples, mas constata-se que não são os conectivos que contribuem para essa formação. A proposição anterior corresponde a afirmar que a expressão proposicional $x^2 \geq 0$ é universal. Dizemos que a proposição é obtida a partir da expressão proposicional utilizando o quantificador universal.

O *quantificador universal* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, a qual é verdadeira se a expressão proposicional for universal e é falsa se a expressão proposicional não for universal, ou seja, se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição falsa.

O quantificador universal aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "qualquer que seja", "para todo", "todos", "cada", "sempre", etc… Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador universal, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\forall}$ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, no caso em que isso possa contribuir para uma melhor clareza ou para evitar ambiguidades. A proposição que nos serviu de exemplo seria assim enunciada

$$\underset{x}{\forall}(x^2 \geq 0) \qquad \text{ou} \qquad \forall_x\,(x^2 \geq 0)$$

ou ainda, não havendo perigo de confusão,

$$\underset{x}{\forall} x^2 \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall_x\, x^2 \geq 0.$$

Está naturalmente implícito que x é considerado como uma variável real. Na proposição obtida é costume dizer que x é uma *variável muda* para lembrar que, a expressão final é uma proposição e não uma expressão proposicional em que x seja candidato a ser substituído (por oposição é costume dizer que as variáveis candidatas a ser substituídas nas expressões proposicionais são *variáveis livres*). Quando falamos simplesmente de variáveis a figurar numa expressão, está subentendido que nos referimos apenas às variáveis livres. Repare-se também que a mesma proposição pode ser escrita utilizando outra variável muda em vez de x: Tanto faz escrever "$\forall_x\, x^2 \geq 0$" como "$\forall_y$ $y^2 \geq 0$".

Tal como já referimos a propósito dos conectivos, não se deve ficar com a ideia que na linguagem matemática corrente se deva utilizar o símbolo "$\forall$" em vez das formulações usuais. A utilização do símbolo "$\forall$" justifica-se normalmente apenas em ocasiões especiais, como nos casos em que se pretende fazer uma análise das expressões do ponto de vista lógico, nos casos em que, por razões de aspecto gráfico, se impõe um enunciado mais curto ou nos casos em que, pela sua complexidade, a linguagem corrente corra o risco de ser ambígua.

Como segundo exemplo de proposição em que intervém o quantificador universal, examinemos o enunciado "o quadrado de qualquer número real é maior que 2 ou menor que 2", que pode ser escrito na forma simbólica

$$\underset{x}{\forall}(x^2 > 2 \vee x^2 < 2).$$

Ao contrário do que acontecia no primeiro exemplo, esta proposição é falsa, uma vez que a expressão proposicional "$x^2 > 2 \vee x^2 < 2$" não é universal. Repare-se que, para constatar que esta expressão proposicional não é universal basta encontrar um contraexemplo, isto é, uma subsituição da variável x que a transforme numa proposição falsa; neste caso isso acontece quando substituirmos x pelo termo $\sqrt{2}$, substituição que nos conduz à proposição falsa

$$(\sqrt{2})^2 > 2 \vee (\sqrt{2})^2 < 2.$$

O exemplo anterior serve também para sublinhar a diferença metodológica entre a Matemática e as ciências experimentais: No quadro duma ciência experimental a expressão "$x^2 > 2 \vee x^2 < 2$" seria facilmente considerada como válida, depois de se efectuar um número suficientemente grande de experiências (o estudante poderá fazer várias experiências com a máquina de calcular e compreenderá o que queremos dizer).

Uma questão que se poderia talvez levantar neste momento diz respeito à utilidade do quantificador universal. Se o nosso objectivo fundamental é podermos enunciar asserções, isto é, expressões proposicionais universais e, em particular, proposições verdadeiras, qual o interesse de enunciar, por exemplo,

$$\underset{x}{\forall}(x < 0 \vee x > 2)$$

se, ao enunciarmos simplesmente

$$x < 0 \vee x > 2$$

estamos a afirmar exactamente o mesmo?[7] A resposta é que há várias situações em que o primeiro enunciado não pode ser substituído pelo segundo. Uma situação típica é aquela em que pretendemos afirmar que a expressão proposicional "$x < 0 \vee x > 2$" não é universal. Esta nossa asserção, verdadeira, como nos convencemos se substituirmos x por 1, pode ser enunciada na forma

$$\sim \underset{x}{\forall}(x < 0 \vee x > 2)$$

mas não na forma " $\sim (x < 0 \vee x > 2)$", uma vez que esta última expressão proposicional também não é universal, como reconhecemos se substituirmos x por 3. Situações do mesmo tipo aparecem quando os quantificadores universais são aplicados a expressões proposicionais combinadas com outros conectivos. Por exemplo,

$$x \geq 0 \vee x \leq 0$$

é uma asserção válida (é uma expressão proposicional universal) mas

$$(\underset{x}{\forall} x \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall} x \leq 0)$$

já não o é (é uma proposição falsa, enquanto disjunção de duas proposições falsas).

★ ★ ★ ★

O segundo quantificador que vamos examinar é o quantificador existencial.

O *quantificador existencial* é um instrumento lógico que transforma uma expressão proposicional com uma variável numa proposição, que é verdadeira se houver pelo menos uma substituição da variável que conduza a uma proposição verdadeira e que é falsa caso contrário, isto é, se qualquer substituição conduzir a uma proposição falsa.

O quantificador existencial aparece na liguagem corrente associado com frequência a palavras como "existe" ou "há". Quando queremos tornar claro que uma proposição é obtida através da utilização do quantificador existencial, enunciamo-la antecedendo a expressão proposicional de partida do símbolo $\boxed{\exists}$ acompanhado, usualmente por baixo ou em índice, da variável que figura nessa expressão e englobando eventualmente entre parênteses a expressão proposicional, como acontecia anteriormente. Por exemplo, as três proposições

[7]Neste caso, nenhuma delas é válida como asserção, a primeira por não ser verdadeira e a segunda por não ser universal.

- Há um número real cujo cubo é 8
- Existe x tal que $x^2 < x$
- Há um número natural cujo quadrado é 5 ou cujo cubo é 7

podem ser escritas na forma

- $\underset{x}{\exists}\, x^3 = 8$
- $\underset{x}{\exists}\, x^2 < x$
- $\underset{n}{\exists}\, (n^2 = 5 \,\vee\, n^3 = 7)$.

Reparemos que as duas primeiras são proposições verdadeiras (as substituições de x por 2, no primeiro caso, e de x por $\frac{1}{2}$, no segundo, servem para nos convencer desse facto) mas a terceira proposição é falsa.

Cabe aqui fazer uma observação sobre uma diferença importante de interpretação de certas proposições existenciais em contextos matemáticos, relativamente à interpretação de proposições do mesmo tipo noutros contextos. Referimo-nos àquelas em que é utilizado o plural numa afirmação de existência. Essa utilização, num contexto matemático, deve ser considerada com uma figura de estilo irrelevante do ponto de vista lógico. Mais concretamente, uma proposição como "Há números cujo cubo é 8" é considerada como significando "$\underset{x}{\exists}\, x^3 = 8$", e portanto como verdadeira, isto apesar de 2 ser o único número real cujo cubo é 8.[8]

Exercício 9. Analise cada uma das expressões proposicionais seguintes utilizando os quantificadores e os conectivos lógicos. Em cada caso considere que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.
a) Nem todos os números naturais são pares.
b) A equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem solução.
c) Há números naturais que não são pares nem primos.
d) x é maior que todos os números reais.
e) Há pelo menos um número real que é maior que todos os números reais.
f) Existe um número real maior que x.
g) Para cada número real, existe um número real maior que ele.
h) As equações $x^2 - 1 = 0$ e $x^2 + 2x + 1 = 0$ têm uma solução comum.

Exercício 10. Para cada uma das expressões seguintes, no caso de se tratar de uma proposição, indique se é verdadeira ou falsa e, no caso de se tratar de uma expressão proposicional com variáveis livres, indicar atribuições de valores às variáveis, se as houver, que a transforme numa proposição verdadeira e numa proposição falsa. Como anteriormente, considerar que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.
a) $\underset{x}{\forall}\, (x < 0 \vee x > 0)$.
b) $\underset{x}{\forall}\, (x \neq 0 \Rightarrow (x < 0 \vee x > 0))$.
c) $\underset{x}{\forall}\, ((x \geq 0 \wedge x \leq 0) \Rightarrow x = 0)$.
d) $\underset{n}{\forall}\, n \geq m$.

[8]Pelo contrário, num contexto não matemático, se alguém se atrevesse a dizer, por exemplo, "Há papas a viver no Vaticano", arricava-se a ouvir a resposta "Não há nada… só há um".

e) $\underset{m}{\exists} (\underset{n}{\forall}\, n \geq m)$.
f) $\underset{x}{\forall}\, x > y$.
g) $\underset{y}{\exists} (\underset{x}{\forall}\, x > y)$.
h) $\underset{y}{\exists}\, x > y$.
i) $\underset{x}{\forall} (\underset{y}{\exists}\, x > y)$.
j) $\underset{m,n}{\forall}\ m + n > m$.
l) $\underset{x}{\forall} (x \times y = 0 \Rightarrow y = 0)$.
m) $(\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$.

Reparemos que, de acordo com a interpretação que demos do quantificador existencial, dizer que uma proposição obtida a partir duma expressão proposicional por meio desse quantificador é falsa é o mesmo que dizer que, se substituirmos a variável por um termo arbitrário, obtemos uma proposição falsa, o que é o mesmo que dizer que a negação da expressão proposicional é universal. Concluímos assim que:

> Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador existencial** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador universal** à **negação** da expressão proposicional.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que existam números naturais cujo dobro é 5" é o mesmo que dizer que "o dobro de qualquer número natural é diferente de 5".

Analogamente,

> Dizer que a **negação** de uma proposição obtida através da aplicação do **quantificador universal** a uma expressão proposicional é verdadeira é o mesmo que dizer que é verdadeira a proposição obtida aplicando o **quantificador existencial** à **negação** da expressão proposicional.

Por exemplo, dizer que "não é verdade que todos os homens são mortais" é o mesmo que dizer que "existe um homem que não é mortal".

Aos dois factos assinalados atrás é costume dar o nome de **segundas leis de de Morgan**[9]. É comum uma pessoa menos atenta cometer o erro de negar uma quantificação universal ou existencial sem reparar que tem de trocar o quantificador.

Exercício 11. Utilize as segundas leis de de Morgan para obter proposições com valores de verdade **opostos** aos das seguintes:
a) Todos os homens são vaidosos.
b) Há números naturais cujo quadrado é ímpar.
c) Existe um número real que é maior que o seu quadrado.

★ ★ ★ ★

Vamos agora examinar como podemos analisar expressões em que a quantificação aparece com domínio restringido. Estamos a pensar, por exemplo, em proposições como

[9] O estudante possivelmente já sentiu alguma analogia entre a conjunção e o quantificador universal, por um lado, e entre a disjunção e o quantificador existencial, por outro.

• Todos os múltiplos de 6 são pares
• Há números pares que são múltiplos de 3.

Uma solução possível para o nosso problema é considerar, no primeiro caso, uma variável r cujo domínio seja formado pelos números múltiplos de 6 e, no segundo caso, uma variável s cujo domínio seja formado pelos números pares, escrevendo então as duas proposições na forma

• $\underset{r}{\forall}\, r$ é par • $\underset{s}{\exists}\, s$ é múltiplo de 3

(é por esta razão que falamos de quantificação com domínio restringido). Trata-se, no entanto, claramente de uma solução artificial e que acaba por ser pouco fecunda para as aplicações. O que gostaríamos de fazer é utilizar variáveis cujo domínio seja o normal neste contexto, isto é, o dos números naturais. Isso consegue-se facilmente se repararmos que as duas afirmações significam respectivamente o mesmo que

• Para cada número natural n, se n é múltiplo de 6, então n é par
• Existe um número natural n tal que n é par e n é múltiplo de 3,

pelo que, usando os símbolos lógicos para os conectivos e os quantificadores, obtemos as formulações

• $\underset{n}{\forall}\, (n$ é múltiplo de 6 $\Rightarrow n$ é par) • $\underset{n}{\exists}\, (n$ é par $\wedge\, n$ é múltiplo de 3),

Apesar de serem estas as formas que se revelam mais fecundas, em particular quando efectuamos raciocínios, é tradicional utilizar as notações, que lembram mais directamente a origem enquanto quantificação com domínios restringidos

• $\underset{n \text{ múltiplo de } 6}{\forall}\, n$ é par • $\underset{n \text{ par}}{\exists}\, n$ é múltiplo de 3 ,

sem deixar de ter presente na nossa cabeça que o significado é o das formulações anteriores.

Exercício 12. Analise cada uma das expressões proposicionais seguintes utilizando os quantificadores e os conectivos lógicos. Em cada caso considere que x, y e z são variáveis cujo domínio são os números reais e que m, n e p são variáveis cujo domínio são os números naturais.
a) Todos os números primos são ímpares ou iguais a 2.
b) Não existe divisor comum de m e n para além de 1.
c) Há pelo menos um número natural sem nenhum divisor, além de 1 e 7.
d) Todos os números reais, com a possível excepção de 0, têm um quadrado maior que 0.
e) Todos os números reais, excepto 0, têm um quadrado maior que 0.

4. Um primeiro exemplo de raciocínio matemático

O raciocínio lógico, ou raciocínio matemático é um conjunto de métodos que podemos utilizar para assegurar a validade de certas afirmações, desde que acreditemos na validade de outras que consideramos como conhecidas.

Não é fácil descrever, com todos os pormenores, a totalidade dos métodos que o raciocínio lógico utiliza, pelo menos num texto destinado a estudantes que tomam contacto pela primeira vez com um estudo sistematizado destes. Uma tentativa de fazer uma tal descrição pormenorizada levaria possivelmente a um texto pesado e difícil de compreender. O que vamos tentar fazer é descrever, principalmente a partir de exemplos, alguns dos métodos que são utilizados com mais frequência e alertar, ao mesmo tempo, para alguns raciocínios incorrectos que as pessoas menos atentas fazem por vezes.

A exposição que fazemos a seguir não deve ser olhada como um espartilho pelo estudante. Este pode, e deve, continuar a fazer raciocínios independentemente de eles se enquadrarem ou não no que vamos examinar. O nosso objectivo não é limitar ou mecanizar o raciocínio, mas ajudar a organizar este, contribuir para a melhoria da capacidade do o transmitir aos outros e, nalguns casos, ajudar a desarmar certos bloqueamentos mentais.

Também nunca é demais sublinhar que o raciocínio lógico está longe de ser a única, ou até a mais importante, actividade matemática. Esta deve ser encarada e exercida como um todo equilibrado, para o qual muitas competências e habilidades concorrem e onde a nossa imaginação e capacidade criativa não se devem deixar domesticar. Pensamos, por exemplo, na capacidade de formar imagens mentais intuitivas, na capacidade de resolver problemas concretos, tanto a partir do reconhecimento da possibilidade de aplicar métodos já estudados como a partir da crisção de novos métodos, na capacidade de reconhecer analogias em situações aparentemente diferentes e daí partir para a criação de novos métodos gerais, na capacidade de desenvolver experiências e tirar daí conjecturas. O raciocínio lógico deve ser olhado como a criação de pontos de segurança, a partir dos quais nos deslocamos com mais liberdade, mesmo que convivendo com a probabilidade, maior ou menor, de estarmos a errar.

★ ★ ★ ★

Quando dizemos que o objectivo do raciocínio lógico é estabelecer a validade de certas afirmações, estamos a pensar nas afirmações como sendo expressões proposicionais e na sua validade como significando que são universais[10]. Ao método utilizado para garantir a validade da afirmação costuma-se dar o nome de *prova* ou *demonstração* da afirmação. Vejamos a seguir um primeiro exemplo, muito simples, de demonstração.

Exemplo 1. O objectivo é demonstrar, no quadro dos números reais, a expressão proposicional

$$\text{Se } x > 7 \text{ então } x^2 + x > 8 \times x.$$

A demonstração poderia ser apresentada do seguinte modo:

1. Suponhamos que $x > 7$.
2. Como $7 > 0$,
3. Tem-se também $x > 0$.
4. Por uma propriedade da multiplicação resulta $x \times x > 7 \times x$
5. Por uma propriedade da adição deduzimos $x \times x + x > 7 \times x + x$
6. Ou seja $x^2 + x > 8 \times x$
7. Uma vez que, a partir da hipótese "$x > 7$", chegámos à conclusão "$x^2 + x > 8 \times x$", ficou provado que "Se $x > 7$ então $x^2 + x > 8 \times x$". □[11]

Na demonstração anterior, e ao contrário do que acontece normalmente num texto corrido, fizémos várias mudanças de linha com o objectivo de tornar claro aquilo a que podemos chamar os *passos da demonstração*. Em cada linha da demonstração apresentada figura uma expressão proposicional, o *passo* da demonstração, acompanhado por vezes de uma pequena explicação da razão porque o passo pode ser escrito.

[10]De acordo com as convenções que temos vindo a utilizar, as afirmações podem, em particular, ser proposições, caso em que a sua validade corresponde a serem verdadeiras.

[11]O sinal □ é utilizado com alguma frequência para indicar que se terminou uma demonstração.

O último passo da demonstração é aquilo que pretendemos demonstrar, em particular é uma expressão proposicional universal. Os restantes passos, com a excepção do segundo, que é uma proposição verdadeira, já não são expressões proposicionais universais (o que acontece, por exemplo ao passo 3 se substituirmos x por -1?) mas sim o que chamaremos expressões universais com a *hipótese* (ou *premissa*) "$x > 7$". Uma *expressão proposicional universal com uma, ou mais, hipóteses* é uma expressão proposicional que fica verdadeira sempre que se atribuem valores às variáveis que tornam as hipóteses verdadeiras.[12]

Cada passo da demonstração deverá estar numa das condições seguintes:

a) Ser uma expressão proposicional que já é reconhecida como universal. Um tal passo não terá nenhuma hipótese associada. No exemplo anterior é isso que acontece com o passo 2.

b) Ser a introdução de uma hipótese. A introdução de uma hipótese é feita frequentemente com uma frase do tipo "Suponhamos que…". No exemplo anterior o primeiro passo é precisamente a introdução de uma hipótese.

c) Resultar de um, ou mais, passos anteriores por alguma *regra de inferência*. Essas regras de inferência são esquemas de raciocínio, que permitem garantir a validade de certas afirmações a partir da validade de outras, e que foram sendo adquiridas pela humanidade ao longo dos tempos e por cada um de nós ao longo da nossa experiência de vida. Em geral essas regras de inferência só permitem garantir a validade dos novos passos com as hipóteses que já estavam associadas aos passos de partida.

Não é fácil explicitar todas a regras de inferência e há normalmente muitos modos diferentes de fazer uma demonstração, cada um utilizando as suas regras de inferência. No exemplo anterior, e noutros que encontraremos em seguida vamos examinar, sem a preocupação de sermos completos algumas das regras de inferência mais utilizadas.

Retomando o exemplo de demonstração apontado acima, reconhecemos que:

O passo 1 corresponde à introdução de uma hipótese (em linguagem corrente dissémos "suponhamos que $x > 7$").

O passo 2 é um resultado conhecido, e por isso não depende de nenhuma hipótese.

O passo 3 resulta dos passos 1 e 2 e da propriedade transitiva da desigualdade. Por esse motivo ele depende também da hipótese da qual já dependia o passo 1.

O passo 4 resulta dos passos 1 e 3 e duma propriedade conhecida relacionando as desigualdades com a multiplicação por um número positivo. Por esse motivo ele depende da hipótese de que já dependia o passo 3.

O passo 5 resulta do passo 4 e duma propriedade conhecida relacionando as desigualdades com a soma. Mais uma vez ele depende da mesma hipótese que o anterior.

O passo 6 resulta do passo 5, e das igualdades conhecidas "$x \times x = x^2$" e "$7 \times x + x = 8 \times x$". Mais uma vez ele depende da mesma hipótese que o anterior.

Por fim, o passo 7 resulta do passo 6 e, o que poderá parecer estranho à primeira vista, ao contrário deste, não depende de nenhuma hipótese.

Como já referimos, na maiorias das regras de inferência o passo que é deduzido fica a depender das hipóteses de que dependessem os passos que conduziram a ele. Se todas as regras fossem deste tipo, não tínhamos maneira de alguma vez chegar a conclusões que não dependam de nenhuma hipótese. Felizmente existem algumas (poucas…) regras que permitem diminuir o número de hipóteses de que dependem as nossas afirmações. A primeira dessas regras é o chamado método da hipótese auxiliar, que foi o utilizado, no exemplo anterior, na passagem do passo 6 para o passo 7.

[12]Não afirmamos, naturalmente, nada sobre as substituições de variáveis que tornem falsa alguma das hipóteses.

Método da hipótese auxiliar: De sabermos que a expressão proposicional "$x^2 + x > 8 \times x$" é universal sob a hipótese "$x > 7$", podemos inferir que

$$\text{“}x > 7 \Rightarrow x^2 + x > 8 \times x\text{”}$$

é universal, independentemente de qualquer hipótese.

Outra observação importante diz respeito à introdução de uma hipótese. Do ponto de vista lógico é totalmente válido introduzir as hipóteses que mais nos agradarem: Pode sempre dizer-se "suponhamos que…". Isso pode dar a ideia errada de uma facilidade que, de facto não é real. Introduzir uma hipótese numa demonstração é um pouco como pedir dinheiro emprestado: É cada vez mais fácil fazê-lo hoje em dia, mas convém sabermos à partida como é que vamos fazer para pagar a dívida, no nosso caso como é que nos vamos ver livres da hipótese, uma vez que a conclusão final não deve depender de nenhuma hipótese. Por isso, do ponto de vista estratégico, será importante reconhecer quando é que poderá valer a pena introduzir uma hipótese. No caso que examinámos como exemplo isso foi bastante simples: Quando o que se pretende demonstrar é uma implicação, segue-se frequentemente o *método directo* de demonstração, isto é, começa-se por introduzir o antecedente da implicação como hipótese e tenta-se, a partir daí, chegar ao consequente desta, após o que se declara a demonstração terminada, ficando implícita a aplicação posterior da regra atrás referida. Na prática é muito frequente aquilo que se quer demonstrar ser uma implicação e, nesse caso, costuma-se dizer que o antecedente da implicação é a *hipótese* e o consequente desta é a *tese*; diz-se assim que, no método directo, parte-se da hipótese para chegar à tese.

É muito raro que todos os passos de uma demonstração sejam explicitados completamente; isso conduziria facilmente a demonstrações extremamente longas e aborrecidas. O que se passa é que o autor da demonstração conhece o destinatário desta e omite muitos dos passos que considera que o destinatário completará sem dificuldade. Retomando o exemplo que apresentámos, vamos agora reparar que houve de facto alguns passos omitidos na nossa demonstração e vamos completá-la, com o objectivo de reconhecer mais algumas regras de inferência, muito simples, que foram utilizadas.

A primeira passagem que poderia merecer uma maior atenção é a dos passos 1 e 2 para o passo 3. Referimos a utilização da propriedade transitiva da desigualdade mas é legítimo alguém perguntar que propriedade é essa e como foi utilizada. A propriedade transitiva da desigualdade diz que, se um número é maior que outro e este é maior que um terceiro, então o primeiro é maior que o terceiro, ou seja, em termos simbólicos, que a implicação

$$(y > z \wedge z > w) \Rightarrow y > w$$

é universal[13]. Esta implicação pode ser assim colocada como um passo da nossa demonstração, que não depende de nenhuma hipótese. Em seguida, para aplicarmos ao caso que nos interessa, podemos particularizar e escrever

$$(x > 7 \wedge 7 > 0) \Rightarrow x > 0.$$

A possibilidade de escrever o passo anterior é explicada por mais uma regra de inferência, que se utiliza com muita frequência:

[13]Podemos usar as variáveis que quisermos, em vez de y, z, w, para exprimir esta propriedade em termos simbólicos.

Regra de particularização: De sabermos que a expressão proposicional

$$(y > z \land z > w) \Rightarrow y > w$$

é universal, podemos inferir que é também universal a expressão

$$(x > 7 \land 7 > 0) \Rightarrow x > 0,$$

que resultou de substituirmos as suas variáveis por termos ou expressões designatórias.

De seguida podemos escrever o passo

$$x > 7 \land 7 > 0,$$

que resulta dos passos 1 e 2 por uma das chamadas regras de conjunção que, de tão evidente, quase não merecia ser enunciada:

Regra de conjunção: Dos passos "$x > 7$" e "$7 > 0$", podemos inferir o passo "$x > 7 \land 7 > 0$".

Esta regra também funciona no sentido oposto: Numa situação em que partíssemos dum passo como "$x > 7 \land 7 > 0$", poderíamos inferir daí quer o passo "$x > 7$" quer o passo "$7 > 0$".

O passo 3, "$x > 0$" resulta então dos dois passos, que tinham ficado implícitos pela seguinte regra de inferência:

Modus Ponen:[14] Dos dois passos "$(x > 7 \land 7 > 0) \Rightarrow x > 0$" e "$x > 7 \land 7 > 0$" podemos deduzir o passo "$x > 0$".

Na demonstração que nos tem vindo a servir de exemplo, também foram omitidos alguns passos entre o passo 3 e o passo 4 e entre o passo 4 e o passo 5. É talvez útil o estudante testar a sua compreensão do que está em jogo, escrevendo explicitamente esses passos, na mesma linha do que foi feito atrás. As propriedades referidas na demonstração em linguagem corrente, relacionando as desigualdades com a soma e a multiplicação, correspondem ao facto de serem universais as expressões proposicionais

$$(y > z \land w > 0) \Rightarrow y \times w > z \times w$$
$$y > z \Rightarrow y + w > z + w,$$

a primeira das quais, por exemplo, costuma ser enunciada dizendo que "se multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por um número maior que 0, obtemos uma desigualdade do mesmo sentido". Lembremos, a propósito, a necessidade de escrevermos "$w > 0$", no caso da primeira implicação. Como o estudante decerto recordará, com a condição "$w < 0$", o que se poderia escrever é

$$(y > z \land w < 0) \Rightarrow y \times w < z \times w.$$

(se multiplicarmos ambos os membros de uma desigualdade por um número menor que 0, obtemos uma desigualdade de sentido contrário).

[14]O nome desta regra é o nome latino dum dos silogismos da Lógica Grega. O exemplo clássico desse silogismo é a dedução: Todos os homens são mortais e Sócrates é homem, logo Sócratas é mortal. Dentro do ponto de visto em que nos temos vindo a colocar, este raciocínio é uma mistura da regra que estamos a enunciar com a regra de particularização.

Para terminarmos a nossa reflexão sobre o exemplo 1, vamos ainda examinar a passagem do passo 5 para o passo 6 que, para além de ter deixado outros passos implícitos, ilustra uma nova regra de inferência de utilização muito comum no raciocínio matemático. Lembremos que o passo 5 era a expressão proposicional

$$x \times x + x > 7 \times x + x.$$

Os passos omitidos são as expressões proposicionais universais conhecidas

$$x \times x = x^2 \qquad 7 \times x + x = 8 \times x.$$

Utilizando a propriedade fundamental da igualdade que destacamos a seguir deduzimos sucessivamente as expressões

$$x^2 + x > 7 \times x + x$$
$$x^2 + x > 8 \times x,$$

no primeiro caso substituindo no passo 5, "$x \times x$" por "x^2" e no segundo caso substituindo na nova expressão "$7 \times x + x$" por "$8 \times x$".

Propriedade fundamental da igualdade: Se conhecermos a igualdade entre duas expressões, então a segunda pode substituir a primeira num ou mais pontos em que ela apareça noutra expressão.

★ ★ ★ ★

Terminado o estudo deste exemplo, aproveitemos para fazer algumas observações relacionadas com as regras de inferência que já examinámos.

A primeira, diz respeito a uma regra incorrecta que é por vezes aplicada, por confusão com a regra *Modus Ponen*: Trata-se de, a partir de uma implicação e do respectivo consequente, inferir incorrectamente o antecedente.

Por exemplo, da implicação "$x > 5 \Rightarrow x > 0$" e de "$x > 0$" **não** se pode inferir "$x > 5$".

Pelo contrário, há uma variante de Modus Ponen que já funciona nos dois sentidos, a saber, aquela em que, em vez de uma implicação, temos uma equivalência: Se um passo for a equivalência de duas expressões e outro passo for uma delas, desses dois passos pode-se inferir a outra expressão.

Uma segunda observação está relacionada com aquilo a que demos o nome de "propriedade fundamental da igualdade". Além daquela, há três propriedades clássicas da igualdade que não referimos e que o estudante decerto já encontrou, sob o nome de propriedades reflexiva, simétrica e transitiva: A *propriedade reflexiva* é a que nos permite garantir que uma expressão como

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1$$

é universal. A *propriedade simétrica* é a que nos permite inferir, por exemplo, duma igualdade como "$x + y = x - y$" a igualdade como os dois membros trocados "$x - y = x + y$". A *propriedade transitiva* é aquela que, por exemplo, dos passos "$x + y = z$" e "$z = xy$" nos permite inferir "$x + y = xy$".

A terceira observação refere-se a uma "aplicação disfarçada", que é comum aparecer, da propriedade fundamental da igualdade. É aquela que, por exemplo, de "$x = 2$" e de "$y = 3$" nos permite inferir "$x + y = 2 + 3$". Essa inferência tem implícito o passo intermédio "$x + y = x + y$" (propriedade reflexiva), no qual nós subsituímos no segundo membro x por 2 e y por 3.

Exercício 13. No quadro dos números reais descobrir quais as regras de inferência que são utilizadas na demonstração da implicação

$$(x + y = 2 \wedge x - y = 4) \Rightarrow (x = 3 \wedge y = -1).$$

Reparar na relação deste exercício com a resolução de um sistema de duas equações a duas incógnitas.

Exercício 14. Mesma questão que no exercício anterior, relativamente à implicação recíproca

$$(x = 3 \wedge y = -1) \Rightarrow (x + y = 2 \wedge x - y = 4).$$

5. Algumas observações sobre os métodos experimentais em Matemática

A regra de particularização, que referimos atrás, permite-nos, por exemplo, inferir da expressão proposicional

$$(x+1)^2 = x^2 + 2 \times x + 1$$

proposições como

$$\begin{aligned}(1+1)^2 &= 1^2 + 2 \times 1 + 1\\ (17+1)^2 &= 17^2 + 2 \times 17 + 1\\ (\pi+1)^2 &= \pi^2 + 2 \times \pi + 1,\end{aligned}$$

que se obtêm dando valores particulares a x. Pelo contrário, a verificação de que uma dada expressão proposicional fica verdadeira quando se atribuem muitos valores diferentes às variáveis (por outras palavras, quando se fazem muitas experiências) não serve, em Matemática, como uma verificação de que a expressão proposicional seja universal. Este é um ponto em que a Matemática se distingue das ciências experimentais.

Não quer isto dizer que o método experimental não tenha um papel muito importante em Matemática, como método que nos auxilia a fazer conjecturas e a acreditar suficientemente nelas para achar que temos possibilidade de as demonstrar. Estas, no entanto, só ganham o estatuto de verdades matemáticas quando são provadas de modo correcto.

Um exemplo clássico das limitações do método experimental em Matemática é a "prova experimental" da expressão proposicional, com uma variável cujo domínio são os inteiros maiores ou iguais a 0,

$$n^2 - n + 41 \text{ é primo.}$$

Podemos fazer muitas experiências e ficar convencidos de que aquela expressão é universal. De facto, para os valores de n entre 0 e 40 obtemos uma proposição verdadeira. Mas para $n = 41$ já a proposição fica falsa o que, do ponto de vista matemático, é suficiente para garantir que a expressão proposicional, ao contrário do que parecia, não é universal. A utililização de experiências em Matemática como método de descoberta não é nova mas está hoje muito facilitada e popularizada graças à existência meios automáticos de cálculo, calculadoras programáveis e computadores, que permitem realizar grande número de experiências em pouco tempo.

As experiências atrás descritas foram feitas num computador, com a ajuda do programa MAPLE V. Depois de entrar as duas ordens

```
f:=n->[n,isprime(n^2-n+41)]:
seq(f(n),n=0..80);
```

o programa forneceu a resposta

```
[0,true],[1,true],[2,true],[3,true],[4,true],[5,true],
[6,true],[7,true],[8,true],[9,true],[10,true],
[11,true],[12,true],[13,true],[14,true],[15,true],
[16,true],[17,true],[18,true],[19,true],[20,true],
[21,true],[22,true],[23,true],[24,true],[25,true],
[26,true],[27,true],[28,true],[29,true],[30,true],
[31,true],[32,true],[33,true],[34,true],[35,true],
[36,true],[37,true],[38,true],[39,true],[40,true],
[41,false],[42,false],[43,true],[44,true],[45,false],
[46,true],[47,true],[48,true],[49,true],[50,false],
[51,true],[52,true],[53,true],[54,true],[55,true],
[56,true],[57,false],[58,true],[59,true],[60,true],
[61,true],[62,true],[63,true],[64,true],[65,true],
[66,false],[67,true],[68,true],[69,true],[70,true],
[71,true],[72,true],[73,true],[74,true],[75,true],
[76,true],[77,false],[78,true],[79,true],[80,true]
```

Do exame desta resposta ressalta que 41 é o primeiro valor de n para o qual obtemos uma proposição falsa. Se nos limitarmos a observar a resposta do computador não se pode dizer que isso seja uma actividade essencialmente matemática. Sê-lo-á um pouco mais se nos perguntarmos se era previsível que a expressão proposicional não podia ser universal e que 41 devia ser um contraexemplo. De facto era-o, uma vez que substituindo n por 41 em $n^2 - n + 41$ se constata imediatamente que ficamos com três parcelas múltiplas de 41, e portanto com um múltiplo de 41 que, sendo diferente de 41, não pode ser primo.

Mas a experimentação em Matemática pode ir mais longe e levar-nos a formar novas conjecturas. Se isolarmos na lista anterior os valores de n que tornam a proposição falsa é possível que reparemos que podem ser escritos na forma

$$\begin{array}{lll} 41 = 41 + 0 & 42 = 41 + 1 & 45 = 41 + 4 \\ 50 = 41 + 9 & 57 = 41 + 16 & 66 = 41 + 25 \\ 77 = 41 + 36 & & \end{array}$$

caso em que seremos decerto levados a formular uma nova conjectura, nomeadamente que os valores de n para os quais $n^2 - n + 41$ não é primo são exactamente os que são soma de 41 com um quadrado perfeito; em linguagem simbólica,

$$(n^2 - n + 41 \text{ não é primo}) \Leftrightarrow (\underset{p}{\exists}\, n = 41 + p^2).$$

Se essa conjectura fosse correcta, o próximo valor de n para o qual $n^2 - n + 41$ não é primo seria $41 + 49 = 90$. Ora, prolongando mais longe a nossa experiência, com a ordem

```
seq(f(n),n=81..100);
```

obtemos mais um pouco da lista

```
[81,true],[82,false],[83,false],[84,true],[85,false],
[86,true],[87,true],[88,false],[89,true],[90,false],
[91,true],[92,false],[93,true],[94,true],[95,true],
```

```
[96,true],[97,false],[98,true],[99,true],[100,true]
```

e constatamos que, apesar de, para $n = 90$, $n^2 - n + 41$ não ser primo, há outros valores de n antes desse para os quais isso acontece, nomeadamente os valores 82, 83, 85 e 88. Mais uma vez tivémos azar com a nossa conjectura, mas isso não quer dizer que devamos desistir de as fazer. A única coisa que podemos ainda ter esperança de salvar é uma conjectura mais fraca, nomeadamente a implicação

$$(\underset{p}{\exists}\, n = 41 + p^2) \Rightarrow (n^2 - n + 41 \text{ não é primo}).$$

Já sabemos que essa implicação é verdadeira para os valores de n resultantes de valores de p entre 0 e 7 e podemos testar o que se passa para mais alguns valores de p, dando a ordem

```
seq(f(41+p^2),p=8..20);
```

e obtendo como resposta a lista

```
[105,false],[122,false],[141,false],[162,false],[185,false],
[210,false],[237,false],[266,false],[297,false],[330,false],
[365,false],[402,false],[441,false]
```

Finalmente parece que começamos a ter sorte com as nossas conjecturas… ou talvez não. Se for como das vezes anteriores, quando fizermos mais uma experiência pode ser que dê asneira… E mesmo que não dê, como é que podemos ter a certeza que não é exactamente depois da nossa última paragem que vem o contraexemplo? Talvez seja uma boa ideia lembrarmo-nos que estamos a trabalhar em Matemática e que talvez a matemática que já conhecemos nos permita dar uma resposta afirmativa que não dependa de qualquer experiência. Recapitulando, o que queremos é garantir, sem margens para dúvidas, é que, se

$$n = 41 + p^2,$$

então o número

$$n^2 - n + 41$$

não é primo. Ora, substituindo n por $41 + p^2$ na expressão anterior, obtemos

$$(41 + p^2)^2 - (41 + p^2) + 41 = (41 + p^2)^2 - p^2$$

que é uma diferença de dois quadrados e portanto, pela fórmula bem conhecida, pode ser decomposto num produto de dois factores

$$(41 + p^2)^2 - p^2 = (41 + p^2 + p) \times (41 + p^2 - p).$$

Uma vez que cada um destes factores é maior ou igual 41, em particular não é 1, fica explicado porque é que aqueles números não podem ser primos.

Exercício 15. Do mesmo modo que verificámos atrás que havia uma razão simples que explicava porque é que, substituindo n por 41, $n^2 - n + 41$ não era primo, encontrar um explicação também simples da razão por que a substituição de n por 82 também conduz a um valor que não é primo.

Exercício 12. Dos dados registados atrás, fornecidos pelo computador, ressalta que os valores de n até 100 para os quais $n^2 - n + 41$ não é primo e que não são soma de 41 com um quadrado perfeito são

$$82 \quad 83 \quad 85 \quad 88 \quad 92 \quad 97\,.$$

a) Será capaz de conjecturar quais os próximos valores que aparecem nesta sequência se a prolongarmos para além de 100?[15]
b) Será capaz de encontrar um valor de n que não apareça na sequência anterior, nem na sequência das somas de 41 com quadrados perfeitos, e para o qual seja fácil prever que $n^2 - n + 41$ não é primo?

6. Mais exemplos de raciocínio matemático

Quando, a propósito do primeiro exemplo de raciocínio, falámos das regras de conjunção, explicámos que essas regras permitiam, tanto partir de uma conjunção de duas expressões proposicionais para chegar a qualquer destas, quer partir de duas expressões proposicionais, para chegar à respectiva conjunção. Desse ponto de vista esses regras podem ser utilizadas quer quando conhecemos uma conjunção e queremos tirar partido dela, quer quando queremos tentar deduzir uma conjunção.

Já para trabalhar com uma disjunção de duas expressões proposicionais, as coisas não parecem tão simples. A dificuldade não está em provar uma disjunção: Se nos lembrarmos que a disjunção de duas proposições é verdadeira desde que pelo menos uma delas o seja, independentemente do que aconteça com a outra, vemos que de uma expressão proposicional podemos sempre deduzir a disjunção dessa expressão proposicional com outra qualquer[16].

> **Regra de disjunção:** De um passo de uma demonstração pode sempre deduzir-se a disjunção do primeiro com uma expressão propoisicional arbitrária.
>
> Por exemplo, de “$x > 5$” podemos deduzir “$x > 5 \vee x = 5$” ou seja, escrito de outro modo, “$x \geq 5$”.

O problema está em perceber que partido podemos tirar de um passo de uma demonstração que seja uma disjunção de duas expressões. Decerto não podemos inferir nenhuma delas, porque bastava a outra ser verdadeira. O exemplo que examinamos em seguida ilustra um processo típico de tirar partido de um passo que é uma disjunção.

Exemplo 2. O objectivo é demonstrar, no quadro dos números reais, a expressão proposicional

$$\text{Se } x > 1 \text{ ou } x < -1, \text{ então } x^2 > 1.$$

A demonstração, em linguagem corrente, embora um pouco mais explicada do que é usual, poderia ser feita do seguinte modo:

1. Suponhamos que $x > 1$ ou $x < -1$.
2. No caso em que $x > 1$:
3. Tem-se também $x > 0$,
4. donde $x \times x > 1 \times x$,
5. isto é, $x^2 > x$,
6. donde, pela propriedade transitiva, $x^2 > 1$.

[15] É possível dar uma regra que define o modo como os termos vão aparecendo nesta sequência e mostrar que estes conduzem a um valor para $n^2 - n + 41$ que não é primo. A justificação é, no entanto, demasiado longa para caber nesta margem…
[16] Embora tenhamos tentações de perguntar se isso poderá servir para alguma coisa… Mas, de facto, há situações em que isso é útil.

7. No caso em que $x < -1$:
8. Tem-se $-x > 1$ (multiplicámos os dois membros por -1)
9. donde, como no caso anterior, $(-x)^2 > 1$,
10. ou seja, $x^2 > 1$.
11. Como, quer no caso em que $x > 1$, quer naquele em que $x < -1$, concluímos que $x^2 > 1$, ficou provado o resultado pretendido. □

A novidade na demonstração precedente está na forma como chegámos ao passo 11. Tratou-se de uma aplicação do chamado método da hipótese alternativa.

Método da hipótese alternativa: Para deduzir "$x^2 > 1$" a partir do passo "$x > 1$ ou $x < -1$" basta, em dois raciocínios separados, chegar a "$x^2 > 1$", com a hipótese "$x > 1$", e de novo a "$x^2 > 1$", agora com a hipótese "$x < -1$".

Em muitos casos a disjunção com a qual se inicia o método da hipótese alternativa envolve uma expressão proposicional e a sua negação (uma tal disjunção sempre universal como facilmente se reconhece). É o que acontece no exemplo seguinte:

Exemplo 3. Pretendemos mostrar, no quadro dos números reais, que é universal a expressão proposicional

$$x > 5 \vee x < 7.$$

A demonstração podia ser feita, em linguagem corrente, do seguinte modo:

1. Ou x é maior que 5 ou x não é maior que 5.
2. No caso em que $x > 5$
3. tem-se também $x > 5 \vee x < 7$
4. No caso em que x não é maior que 5
5. tem-se $x \leq 5$
6. donde, como $5 < 7$,
7. tem-se $x < 7$
8. portanto também $x > 5 \vee x < 7$.
9. E qualquer dos casos, chegámos assim a $x > 5 \vee x < 7$. □

Reparemos que uma das coisas que faz com que construir uma demonstração como esta não seja um processo meramente mecânico é o facto de para a conseguirmos desenvolver ter sido necessário descobrir qual a boa hipótese alternativa que interessava para atingir o resultado. A capacidade de fazer uma tal escolha faz parte da intuição matemática que só se adquire através de muito trabalho prático e de muitas tentativas de construirmos nós mesmos demonstrações. Apresentamos em seguida mais um exemplo em que a boa escolha da hipótese alternativa foi fundamental para construir uma demonstração simples.

Exemplo 4. Continuemos a trabalhar no quadro dos números reais e reparemos que o *módulo*, ou *valor absoluto*, $|z|$, de um número real z, pode ser caracterizado como sendo o maior dos dois números z e $-z$ (pensar no que acontece no caso em que $z \geq 0$ e naquele em que $z \leq 0$). Podemos assim supor conhecidas como universais as seguintes expressões proposicionais

$$|z| = z \vee |z| = -z, \qquad z \leq |z| \wedge -z \leq |z|.$$

O que pretendemos neste exemplo é examinar uma demonstração da conhecida propriedade

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Essa demonstração podia ser relatada, em linguagem corrente, do seguinte modo:

1. Tem-se $|x + y| = x + y$ ou $|x + y| = -(x + y)$.
2. No caso em que $|x + y| = x + y$,
3. podemos atender a que $x \leq |x|$
4. e a que $y \leq |y|$
5. para deduzir que $x + y \leq |x| + |y|$,
6. portanto $|x + y| \leq |x| + |y|$.
7. No caso em que $|x + y| = -(x + y)$,
8. podemos atender a que $-x \leq |x|$
9. e a que $-y \leq |y|$
10. para deduzir que $-(x + y) \leq |x| + |y|$,
11. portanto $|x + y| \leq |x| + |y|$.
12. Em qualquer dos casos temos assim $|x + y| \leq |x| + |y|$. □

O "segredo" do sucesso e simplicidade da demonstração precedente foi a descoberta de que a boa alternativa a apresentar era "$|x + y| = x + y$ ou $|x + y| = -(x + y)$". Podíamos ter tentado começar com a alternativa "$|x| = x$ ou $|x| = -x$", subdividindo depois cada caso com a alternativa "$|y| = y$ ou $|y| = -y$" e também acabaríamos por chegar ao resultado, mas com uma demonstração bem mais complexa. Aqui, como noutras situações da nossa vida, só com muito treino é que se consegue sucesso.

Vamos agora retomar a expressão proposicional que examinámos no exemplo 3 para exemplificar um novo método de demonstração, também muito utilizado em Matemática, o *método de redução ao absurdo*.

Exemplo 5. Vamos, mais uma vez, apresentar uma demonstração da expressão proposicional

$$x > 5 \vee x < 7.$$

A demonstração pode ser desenvolvida do seguinte modo:

1. Suponhamos que não era verdade que $x > 5 \vee x < 7$.
2. Tem-se assim $(\sim x > 5) \wedge (\sim x < 7)$,
3. portanto $5 \geq x$
4. e $x \geq 7$
5. donde, pela propriedade transitiva, $5 \geq 7$,
6. o que é absurdo, uma vez que sabemos que não é verdade que $5 \geq 7$.
7. Podemos assim concluir que $x > 5 \vee x < 7$. □

Método de redução ao absurdo. Se, partindo da hipótese "$\sim (x > 5 \vee x < 7)$", se consegue chegar a dois passos ("$5 \geq 7$" e "$\sim (5 \geq 7)$") que são a negação um do outro (o *absurdo*), então podemos concluir que "$x > 5 \vee x < 7$".

Existe um outro método de raciocínio, que por vezes é confundido erroneamente com o método de redução ao absurdo, e a que se costuma dar o nome de *método de passagem ao contrarrecíproco*. Tal como o método directo, o objectivo é provar propriedades que tenham a forma de uma implicação, ou seja, que tenham uma hipótese e uma tese, mas enquanto que no método directo se começa por supor a hipótese e se chega, a partir daí, à tese, no método de passagem ao contrarrecíproco começa-se por supor a negação da tese e chega-se, a partir daí, à negação da hipótese. A razão porque este método funciona é simplesmente a de que podemos aplicar o método usual da hipótese auxiliar e tirar em seguida partido do facto, já referido atrás, de uma implicação e a sua contrarrecíproca terem o mesmo valor de verdade.

Exemplo 6. Vamos demonstrar a expressão proposicional

$$x^2 < 1 \Rightarrow x < 1,$$

utilizando o método de passagem ao contrarrecíproco.[17] A demonstração pode ser descrita em linguagem corrente do seguinte modo:

1. Suponhamos que não se tinha $x < 1$.
2. Tem-se assim $x \geq 1$,
3. portanto também $x > 0$,
4. donde por uma propriedade conhecida da multiplicação, $x \times x \geq 1 \times x$,
5. isto é, $x^2 \geq x$.
6. Pela propriedade transitiva, segue-se que $x^2 \geq 1$,
7. pelo que não se tem $x^2 < 1$
8. e a implicação pretendida resulta por aplicação do método de passagem ao contrarrecíproco.☐

Método de passagem ao contrarrecíproco: Para provarmos a implicação "$x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$", basta partir da hipótese "$\sim (x < 1)$" (a negação da tese) e chegar a "$\sim (x^2 < 1)$" (a negação da hipótese).

Voltemos a insistir que os métodos de redução ao absurdo e de passagem ao contrarrecíproco são métodos distintos: Em primeiro lugar, se a expressão proposicional a demonstrar não tem a forma de uma implicação, como acontecia com o exemplo 5, nem sequer faz sentido falar de método de passagem ao contrarrecíproco e o método de redução ao absurdo é um método que pode ser tentado; em segundo lugar, mesmo quando o que queremos demonstrar é uma implicação, no método de passagem ao contrarrecíproco partimos da negação da tese para chegar à negação da hipótese e no método de redução ao absurdo partimos da negação da implicação e tentamos chegar a uma contradição, tirando partido frequentemente do facto de da negação da implicação se poder deduzir, como já referimos, o antecedente (ou seja, a hipótese) e a negação do consequente (ou seja a negação da tese).

Exercício 16. No quadro dos números reais, demonstrar a expressão proposicional

$$(x \leq 1 \wedge x \geq -1) \Rightarrow x^2 \leq 1.$$

Sugestão: Além do método directo, utilizar o método da hipótese alternativa para tratar separadamente os casos em que $x \geq 0$ e em que $x \leq 0$.

Exercício 17. No quadro dos números reais, demonstrar:

a) A implicação

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow y \leq 1.$$

b) Utilizando a conclusão de a), a implicação recíproca da do exercício 16:

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow (x \leq 1 \wedge x \geq -1).$$

[17]Será instrutivo tentar fazer esta demonstração pelo método directo para ver onde vai encontrar dificuldades. Cuidado, se o método que seguiu puder ser adaptado para demonstrar a implicação "$x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$" então cometeu decerto algum erro, porque esta última não é válida (pensar no contraexemplo que vem de substituir x por -2).

Exercício 18. No quadro dos números reais, e utilizando a conclusão do exercício 16, demonstrar a expressão proposicional

$$x^2 > 1 \Rightarrow (x > 1 \vee x < -1).$$

Exercício 19. No quadro dos números naturais demonstrar a expressão proposicional

$$m \times n \geq 1000 \Rightarrow (m \geq 10 \vee n \geq 100).$$

7. Alguns raciocínios envolvendo quantificadores

Até agora todos os exemplos de raciocíno que apresentámos não envolveram expressões com quantificadores. Vamos agora examinar alguns exemplos muito simples de raciocínio em que as expressões com quantificadores vão existir e aproveitar para descobrir algumas regras inferência que intervêm na dedução de expressões desse tipo.

Exemplo 7: Pretendemos demonstrar a proposição muito simples:

$$\underset{x}{\exists}\, x > 5.$$

A demonstração resume-se a dois passos:

1. Sabemos que $6 > 5$.
2. Logo, $\underset{x}{\exists}\, x > 5$. □

É só isto…, para provar que alguma coisa existe basta arranjarmos um exemplo dessa coisa… O próximo exemplo é uma pequena variante deste, em que a novidade é que existe outra variável além da variável quantificada com o quantificador existencial.

Exemplo 8: Pretendemos provar a expressão proposicional

$$\underset{x}{\exists}\, x > y,$$

que tem y como única variável livre, ou seja, queremos mostrar que, quando se substitui y por um termo qualquer, obtemos uma proposição verdadeira. No caso em que tínhamos 5 no lugar de y já vimos atrás o que fazer; se em vez de 5 tivéssemos 8, a demonstração anterior era facilmente adaptada, bastava partir de $9 > 8$, no lugar de $6 > 5$. Pensando um pouco vemos que para qualquer termo que se tivesse no lugar de 5 se arranjava uma demonstração do mesmo tipo, bastava, em vez de 6 utilizar esse termo somado com uma unidade. A demonstração do resultado geral, corresponde a isto que demorámos tanto a dizer:

1. Sabemos que $y + 1 > y$.
2. Logo, $\underset{x}{\exists}\, x > y$. □

A regra de inferência que utilizámos nos dois exemplos anteriores é a chamada generalização existencial:

> **Regra de generalização existencial**: Para concluir um passo construído com o quantificador existencial, como "$\underset{x}{\exists}\, x > y$" basta chegar a um passo como "$y + 1 > y$", que resulta da expressão "$x > y$" por substituição da variável quantificada x pelo valor particular "$y + 1$".

Depois de termos examinado o exemplo de um raciocínio envolvendo o quantificador existencial, vamos ver o que se pode fazer com expressões envolvendo o quantificador universal.

Exemplo 9: No quadro dos números reais, vamos demonstrar a expressão proposicional

$$(\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0) \Rightarrow y = 0,$$

que, em linguagem corrente, seria enunciada "Se um número dá 0 quando multiplicado por qualquer número, então ele tem que ser 0". A demonstração pode ser feita da seguinte maneira:

1. Suponhamos que $\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0$.
2. Em particular, tem-se então $1 \times y = 0$.
3. Mas $1 \times y = y$,
4. logo $y = 0$.
5. Ficou assim provado que $(\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0) \Rightarrow y = 0$. □

A única passagem que merece alguma atenção, por utilizar uma regra de inferência ainda não examinada, é a do passo 1 para o passo 2.

Segunda regra de particularização:[18] De um passo de uma demonstração construído com o quantificador universal, como "$\underset{x}{\forall}\, x \times y = 0$" podemos deduzir o passo "$1 \times y = 0$", que resulta da expressão "$x \times y = 0$" por subsituição da variável quantificada x pelo valor particular "1".

Exemplo 10: Vamos demonstrar a proposição "Se y é um real arbitrário, então ou $x^2 \times y \geq 0$ para todo o x, ou $x^2 \times y \leq 0$ para todo o x", que se pode traduzir, em linguagem simbólica, por

$$\underset{y}{\forall}\, ((\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)).$$

Em linguagem corrente, a demonstração pode-se desenrolar do seguinte modo:

1. Dados x e y quaisquer, ou $y \geq 0$ ou $y \leq 0$.
2. No caso em que $y \geq 0$,
3. Como $x^2 \geq 0$,
4. tem-se também $x^2 \times y \geq 0$
5. donde, como x é qualquer, $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0$,
6. e portanto também $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$.
7. No caso em que $y \leq 0$,
8. Como $x^2 \geq 0$,
9. tem-se a desigualdade oposta $x^2 \times y \leq 0$
10. donde, como x é qualquer, $\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0$,
11. e portanto também $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$.
12. Em qualquer dos casos $(\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0)$
13. e portanto, como y é qualquer $\underset{y}{\forall}\, ((\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \geq 0) \vee (\underset{x}{\forall}\, x^2 \times y \leq 0))$. □

Na demonstração precedente, para além de termos reencontrado regras de inferência já estudadas, entre as quais o método da hipótese alternativa, encontrámos mais uma, a que nos permitiu chegar aos passos 5, 9 e 13.

[18]Comparar com a regra de particularização referida na página 20.

Regra de Generalização: Se uma expressão como "$x^2 \times y \geq 0$" é válida para um valor arbitrário da variável x, pode deduzir-se daí a expressão "$\underset{x}{\forall} x^2 \times y \geq 0$", obtida a partir daquela por utilização do quantificador universal.

Observe-se que, pelo contrário, do passo 4 não poderíamos ter deduzido "$\underset{y}{\forall} x^2 \times y \geq 0$", uma vez que o passo 4 estava dependente da hipótese "$y \geq 0$" e portanto "y não é arbitrário".

Exercício 20. No quadro dos números naturais e lembrando a definição

$$n \text{ é múltiplo de } m \Leftrightarrow \underset{p}{\exists}\, n = m \times p,$$

demonstrar a expressão proposicional

$$n \text{ é múltiplo de } 1.$$

Exercício 21. No quadro dos números reais, demonstrar os resultados nas alíneas seguintes. Em cada caso pode fazer uma demonstração em linguagem corrente ou esquematizada na forma habitual, mas o importante é que saiba reconhecer a aplicação das principais regras de inferência estudadas.

a) $\underset{x}{\forall} (\underset{y}{\exists}\, y < x)$ (para cada número existe sempre um que é menor que ele).

b) $(\forall_x (x > 0 \Rightarrow y < x)) \Rightarrow y \leq 0$ (se y é menor que todos os números estritamente positivos, então $y \leq 0$). **Sugestão:** Reparar que, se $y > 0$, então $0 < \frac{y}{2} < y$.

c) $\underset{z}{\exists} (x \leq z \wedge y \leq z)$ (dados x e y existe sempre um número maior ou igual a ambos). **Sugestão:** Utilizar o resultado conhecido: $x \leq y \vee y \leq x$.

d) $x \leq y \Rightarrow \underset{z}{\forall} (y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ (Se um número é menor ou igual a outro, então todos os números maiores ou iguais ao segundo são também maiores ou iguais ao primeiro).

e) $(\underset{z}{\forall} (y \leq z \Rightarrow x \leq z)) \Rightarrow x \leq y$ (Se todos os números maiores ou iguais a y são também maiores ou iguais a x, então x é menor ou igual a y).

Bibliografia

J. Sebastião e Silva, *Compêndio de Matemática (Curso Complementar do Ensino Secundário)*, 1º volume, 1º tomo, ed. GEP, Ministério da Educação e Cultura, 1975.

R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Herman, Paris.

J. E. Rubin, *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day, 1967.