Fundamentos de Lógica
Lógica Proposicional

Antonio Alfredo Ferreira Loureiro

loureiro@dcc.ufmg.br

http://www.dcc.ufmg.br/~loureiro

Alguns fatos históricos

- Primeiros grandes trabalhos de lógica escritos por Aristóteles (384 B.C.–322 B.C.):
  - Coleção de regras para raciocínio dedutivo a ser usado em qualquer área do conhecimento.

- Leibniz (século XVII) propõe o uso de símbolos para mecanizar o processo de raciocínio dedutivo.

- Boole and De Morgan (século XIX) propõem as bases da lógica simbólica moderna usando as idéias de Leibniz.

- Atualidade: pesquisa continua sendo aplicada em áreas como:
  - projeto de circuito lógico
  - teoria de bancos de dados relacionais
  - teoria de autômatos e computabilidade
  - inteligência artificial

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- Forma de um argumento: conceito central da lógica dedutiva.
- Argumento: seqüência de afirmações para demonstrar a validade de uma asserção.
- Como saber que a conclusão obtida de um argumento é válida?
  ➜ As afirmações que compõem o argumento
  - são aceitas como válidas, ou
  - podem ser deduzidas de afirmações anteriores.
- Em lógica, forma de um argumento $\neq$ seu conteúdo.
- "Análise lógica" não determina a validade do conteúdo de um argumento.
- "Análise lógica" determina se a verdade de uma conclusão pode ser obtida da verdade de argumentos propostos.
- Lógica: Ciência do Raciocínio.

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- $\boxed{\text{Exemplo 1:}}$

se a sintaxe de um programa está errada **ou**
se a execução do programa resulta em divisão por zero
então o computador irá gerar uma mensagem de erro.
$\therefore$ Computador não gera mensagem de erro

$$\Downarrow$$

Sintaxe do program está correta **e**
Execução do programa não resulta em divisão por zero.

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$

se $x \in \mathcal{R} \mid x < -2$ **ou** $x > 2$
então $x^2 > 4$.
$\therefore$ **se** $x^2 \leq 4$

$$\Downarrow$$

$x \geq -2$ **e** $x \leq 2$.

Forma de um Argumento $\times$ Seu Conteúdo

- Nos exemplos, temos que o conteúdo dos argumentos é diferente.

- No entanto, a "forma lógica" é a mesma:

  se p **ou** q
  então r.
  $\therefore$ **se não** r
  então não p **e** **não** q.

- Argumentos na forma lógica são normalmente representados por letras minúsculas do alfabeto.
  Exemplo: p, q, r.

- Em geral, as definições da lógica formal estão de acordo com a lógica natural ou intuitiva das pessoas de bom senso.

- O formalismo é introduzido para evitar ambiguidade e garantir consistência.

Proposições

- Em toda teoria matemática, usam-se termos já definidos na concepção de novas definições.

- Mas como fazer com os termos mais “primitivos”?
  - Termos “primitivos” ou iniciais não são definidos.
  - Em lógica, os termos *sentença*, *verdadeiro*, e *falso* são os termos iniciais não definidos.

- Definição: uma afirmação ou proposição é uma sentença que é verdadeira (V) ou falsa (F) mas não ambas.

- Exemplo 1:
  - $2 + 2 = 4$
  - $2 + 2 = 5$

  são proposições, onde a primeira é V e a segunda é F.

Proposições

- $\boxed{\text{Exemplo 2:}}$
  – Ele é um estudante universitário.

  não é uma proposição já que depende da referência ao pronome "ele."

- $\boxed{\text{Exemplo 3:}}$
  – $x + y > 0$.

  também não é uma proposição já que depende dos valores de x e y.

- É possível transformar uma sentença como no exemplo 2 ou 3 numa proposição?
  – Sim, através de quantificadores, como será visto em lógica de predicados.

Proposições compostas

- Nos exemplos usados daqui para frente, usaremos as letras minúsculas (por exemplo, p, q, r) para representar afirmações.
- Os seguintes símbolos podem ser usados para definir expressões lógicas mais complexas a partir de expressões mais simples:
  - $\sim$ ou $\neg$: não
    $\sim p$ é lido como "não p" e é chamado de negação de p.
  - $\wedge$: e
    $p \wedge q$ é lido como "p e q" e é chamado de conjunção de p e q.
  - $\vee$: ou
    $p \vee q$ é lido como "p ou q" e é chamado de disjunção de p e q.
- $\sim$ é um operador unário e $\wedge$ e $\vee$ são operadores binários.
- Avaliação na seguinte ordem: $\{\sim\}, \{\wedge, \vee\}$.
- Exemplo:
  - $\sim p \vee q = (\sim p) \vee q$
  - $p \vee q \wedge r$ é ambíguo.
    Correto: $(p \vee q) \wedge r$ ou $p \vee (q \wedge r)$.

Proposições:
Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- Mas e Não/nem ... nem

  p = Está quente.

  q = Está ensolarado.

  Exemplos:

  (a) Não está quente mas está ensolarado.

  “Mas” = $\wedge \quad \rightsquigarrow \quad \sim p \wedge q$.

  (b) Não está quente nem ensolarado.

  “Nem A nem B” = $\sim A \wedge \sim B \quad \rightsquigarrow \quad \sim p \wedge \sim q$.

Proposições: Tradução de sentenças em linguagens natural e algébrica para símbolos

- **e** ($\wedge$), **ou** ($\vee$), e desigualdades

  Sejam três números reais representados por a, b, e x.

  – $x \leq a \equiv x < a \vee x = a$

  – $a \leq x \leq b \equiv x \geq a \wedge x \leq b$

  – $2 \leq x \leq 1 \equiv x \geq 2 \wedge x \leq 1$, que é F.

  – Sejam os predicados:

  p = $x > 0$; q = $x < 3$; r = x = 3.

  (a) $x \leq 3$ = q $\vee$ r

  (b) $0 < x < 3$ = p $\wedge$ q

  (c) $0 < x \leq 3$ = p $\wedge$ (q $\vee$ r)

Proposições e os “valores-verdade”

- Para uma sentença ser uma proposição é necessário ter um valor-verdade bem definido, i.e., V ou F.

- Negação ($\sim$) e sua tabela da verdade:

p	$\sim p$
V	F
F	V

- Conjunção ($\wedge$) e sua tabela da verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposições e os “valores-verdade”

- Disjunção $(\vee)$

  Possíveis significados:

  ➜ inclusive: p ou q ou ambos, e

  – exclusive: p ou q, mas não ambos.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposições mais complexas

- Construa a tabela da verdade para a expressão:

$$E = (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	E
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

$E = p \oplus q = p$ **xo**r q (ou exclusivo)

- O ponto fundamental em assinalar "valores-verdade" para proposições compostas é que permite o uso da lógica para decidir a verdade de uma proposição usando somente o conhecimento das partes.

- A lógica não ajuda a determinar a verdade ou falsidade de uma afirmação em si, ou seja, seu conteúdo.

Equivalência lógica

- As proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ possuem os mesmos valores-verdade.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

➜ Por essa razão, $p \wedge q$ e $q \wedge p$ são equivalentes logicamente.

- <u>Definição</u>: duas proposições P e Q são equivalentes logicamente se e somente se os valores-verdade obtidos forem idênticos para cada combinação possível das variáveis que formam as proposições.

Equivalência lógica

- Como verificar que duas proposições P e Q são equivalentes logicamente?
  1. Construa a tabela da verdade para P.
  2. Construa a tabela da verdade para Q usando os mesmos valores de variáveis para as afirmações que formam a proposição.
  3. Verifique se as tabelas da verdade de P e Q são idênticas para cada combinação de valores-verdade. Se forem, P e Q são equivalentes logicamente, caso contrário não.

- Exemplos:
  - $\sim (\sim p) \equiv p$
  - $\sim (p \wedge q) \not\equiv \sim p \wedge \sim q$

Equivalência lógica
Leis de “De Morgan”

- Negação de $\wedge$ e $\vee$: Leis de “De Morgan.”

  Sejam as afirmações:
  – p = João é alto.
  – q = José é ruivo.
  A proposição $p \wedge q$ é verdadeira sse os componentes forem verdadeiros.

- Quando a proposição é falsa?

  Quando um dos componentes ou ambos forem falsos, i.e.,

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

- Mostre as seguintes equivalências:
  – $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
  – $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
  Estas duas equivalências são conhecidas como leis de “De Morgan” que foi o primeiro a expressá-las em termos matemáticos.

Exemplos das leis de De Morgan

(a) p = João tem 2 m de altura e ele pesa pelo menos 90 kg.

$\sim p$ = João não tem 2 m de altura ou ele pesa menos de 90 kg.

(b) p = $x < 2$

$\sim p$ = $x \not< 2 \equiv x \geq 2$

(c) p = $-1 < x \leq 4$

~p = $\sim(-1 < x \leq 4) \equiv \sim(x > -1 \wedge x \leq 4) \equiv$

$x \not> -1 \vee x \not\leq 4 \equiv x \leq -1 \vee x > 4.$

(d) p = João é alto e João é magro.

~p = João não é alto ou João não é magro.

Exemplos das leis de De Morgan

(e) $p' =$ João é alto e magro.

$\sim p' =$ João não é alto e magro.

Em lógica formal os vocábulos “e” e “ou” são permitidos somente entre afirmações completas e não entre pedaços de uma sentença.

- Apesar das leis da lógica serem extremamente úteis, elas devem ser usadas como uma ajuda ao raciocínio e não como um substituto mecânico a inteligência.

- Equivalência lógica é muito útil na construção de argumentos.

Tautologias e contradições

- Uma tautologia é uma proposição que é sempre verdadeira independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

- Uma contradição é uma proposição que é sempre falsa independente dos valores-verdade das afirmações que compõem a proposição.

➜ De acordo com estas definições, a verdade de uma tautologia ou falsidade de uma contradição se devem a estrutura lógica da proposição em si e são independentes dos significados das afirmações que compõem a proposição.

Tautologias e contradições

- Mostre que a proposição $p \vee \sim p$ é uma tautologia e que a proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

- Se t é uma tautologia e c uma contradição mostre que $p \wedge t \equiv p$ e $p \wedge c \equiv c$

Sumário da equivalência lógica

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv$ $p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv$ $p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$
Negação	$p \vee \sim p \equiv t$	$p \wedge \sim p \equiv c$
Dupla negação	$\sim (\sim p) \equiv p$	
Idempotente	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
De Morgan	$\sim (p \wedge q) \equiv$ $\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \vee q) \equiv$ $\sim p \wedge \sim q$
Limite universal	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negações	$\sim t \equiv c$	$\sim c \equiv t$

Sumário da equivalência lógica

- Mostre que

$$\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$$

através dos axiomas acima.

Proposição condicional

- Sejam p e q proposições.
  - "Se p então q" (ou p implica q) é representado simbolicamente por
$$p \longrightarrow q.$$
  - p é chamado de <u>hipótese</u> e q de <u>conclusão</u>.
  - Esta sentença é chamada de condicional porque a verdade da proposição q está condicionada a verdade da proposição p.

- Exemplo:
  - Se 48 é divisível por 6 então 48 é divisível 3.

Proposição condicional

- $\longrightarrow$ é um conectivo lógico binário para o qual podem ser definidos valores-verdade.

- Determinando a tabela da verdade para $\longrightarrow$ (se–então).
  - A única combinação em que a sentença condicional é falsa é quando a hipótese é V e a conclusão é F.

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição condicional

- Seja a seguinte sentença que descreve uma promessa:

  Se (você se apresentar para trabalhar na segunda-feira pela manhã)$_{=[p]}$ então (você terá o emprego)$_{=[q]}$.

- Em que situação o empregador não falou a verdade, ou seja, a promessa (sentença) é falsa?

$$p = \text{V} \wedge q = \text{F}.$$

- E se a afirmação p não for satisfeita?
  - Não é justo dizer que a promessa é falsa.

Proposição condicional

- Prioridade para o conectivo lógico $\longrightarrow$:
  - Último a ser avaliado em expressões que contêm
    $\sim$, $\vee$, $\wedge$.
- Construa a tabela da verdade para a sentença $p \vee \sim q \longrightarrow \sim p$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$p \vee \sim q \longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	T	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional

- Mostre que $p \vee q \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Proposição condicional

- É possível representar $p \longrightarrow q$ em termos dos conectivos $\sim$, $\vee$, $\wedge$?
  - Sim.

$$p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

- Negação:

$$\begin{aligned} \sim (p \longrightarrow q) &\equiv \sim (\sim p \vee q) \\ &\equiv \sim (\sim p) \wedge \sim q \\ &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

- Exemplos:

p: Se o meu carro está na oficina então eu não posso ir a aula.

$\sim p$: Meu carro está na oficina e eu posso ir a aula.

Proposição condicional: Contrapositivo

- O contrapositivo de $(p \rightarrow q)$ é $(\sim q \rightarrow \sim p)$.

$$p \rightarrow q \ \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Exemplo:

$p \rightarrow q$: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.

$\sim q \rightarrow \sim p$: Se amanhã não é segunda-feira então hoje não é Páscoa.

Proposição condicional: Reverso

- O <u>reverso</u> de $(p \longrightarrow q)$ é $(q \longrightarrow p)$.

$$p \longrightarrow q \stackrel{?}{\equiv} q \longrightarrow p$$

Não.

Proposição condicional: Inverso

- O inverso de $(p \rightarrow q)$ é $(\sim p \rightarrow \sim q)$.

$$p \rightarrow q \stackrel{?}{\equiv} \sim p \rightarrow \sim q$$

  Não.

- Exemplos:

  Reverso: Se amanhã é segunda-feira então hoje é Páscoa.

  Inverso: Se hoje não é Páscoa então amanhã não é segunda-feira.

- Reverso $\equiv$ inverso, i.e., $q \rightarrow p \equiv \sim p \rightarrow \sim q$.

Proposição condicional: Somente se

- A sentença "p somente se q" significa que

  p pode ocorrer

  <u>somente</u> se q ocorre.

  $\therefore$ Se q não ocorre então p não pode ocorrer, i.e.,

  Se $\sim q$ então $\sim p \equiv$ Se p então q.

- p somente se q $\not\equiv$ p se q:

  p somente se q: $p \longrightarrow q$

  p se q: $q \longrightarrow p$

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- A sentença "bicondicional" entre p e q é expressa como

  p se e somente se q

  e é representada por

  $$p \leftrightarrow q$$

  e tem a seguinte tabela da verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- O conectivo $\leftrightarrow$ tem a mesma prioridade do conectivo $\rightarrow$.
- Mostre que $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Proposição condicional: Bicondicional (se somente se)

- Exemplo:

  Este programa está correto se somente se ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada.

- Reescrevendo como uma conjunção de duas sentenças se–então:

  Se este programa está correto então ele produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada

  e

  se o programa produz a resposta correta para todos os possíveis valores de dados de entrada então ele está correto.

- $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$.

Proposição condicional:
Condição necessária & Condição suficiente

Sejam r e s afirmações.

- r é uma condição suficiente para s:
  - se r então s.

  $\therefore$ A ocorrência de r é suficiente para garantir a ocorrência de s.

- r é uma condição necessária para s:
  - se não r então não s $\vee$

    se s então r.

  $\therefore$ Se r não ocorrer então s também não pode ocorrer, i.e., a ocorrência de r é necessária para se ter a ocorrência de s.

- A frase

  r é uma condição necessária e suficiente para s significa "r se somente se s."

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- Considere a sentença condicional $p \longrightarrow q$:

  Se João é elegível para votar então ele tem pelo menos 16 anos.

  p: João é elegível para votar.

  q: João tem pelo menos 16 anos.

  – A verdade de p é <u>suficiente</u> para garantir a verdade de q, ou seja, João ser elegível para votar é condição suficiente para que ele tenha pelo menos 16 anos.

  – A condição q é <u>necessária</u> para a condição p ser verdadeira, ou seja, João ter pelo menos 16 anos é condição necessária para que ele seja elegível para votar.

Proposição condicional: Condição necessária & Condição suficiente

- Converta uma condição suficiente para a forma se–então
  - O nascimento de João em solo brasileiro é uma condição suficiente para ele ser cidadão brasileiro.
  - ➜ Se João nasceu em solo brasileiro então ele é um cidadão brasileiro.

- Converta uma condição necessária para a forma se–então
  - João ter 35 anos é uma condição necessária para ser presidente do Brasil.
  - ➜ Se João não tem 35 anos então ele não pode ser presidente do Brasil.
  - ➜ Se João pode ser o presidente do Brasil então ele já tem pelo menos 35 anos.

Argumentos válidos e inválidos

- Alguns fatos sobre argumentos do ponto de vista da matemática e da lógica:
  - Um argumento não é uma disputa.
  - Um argumento é uma seqüência de comandos que termina numa conclusão.
  - Um argumento ser válido significa que a conclusão pode ser obtida <u>necessariamente</u> das afirmações que precedem.

- Argumento (definição):
  - Um argumento é uma seqüência de afirmações.
  - Todas as afirmações, exceto a última, são chamadas de premissas ou suposições ou hipóteses.
  - A última afirmação é chamada de conclusão.
  - O símbolo $\therefore$, que é lido como "de onde se conclui" é normalmente colocado antes da conclusão.

Argumentos válidos e inválidos

- Exemplo:

  Se Sócrates é um ser humano então Sócrates é mortal;

  Sócrates é um ser humano;

  $\therefore$ Sócrates é mortal.

- Forma simbólica:

  Se p então q;

  p;

  $\therefore$ q.

  ➜ É conveniente pensar em p e q como variáveis que podem ser substituídas por argumentos.

- A forma de um argumento é <u>válida</u> sse

  para todas as combinações de argumentos que levam a premissas verdadeiras então a conclusão também é verdadeira.

  ➜ A verdade da conclusão é obtida analisando os valores-verdade da forma lógica em si.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

A validade da forma de um argumento pode ser feita seguindo os seguintes passos:

1. Identifique as premissas e conclusão do argumento.
2. Construa a tabela da verdade identificando as colunas das premissas e da conclusão.
3. Identifique as linhas onde todas as premissas são verdadeiras (linhas críticas).
4. Para cada linha crítica verifique se a conclusão do argumento é verdadeira.
   (a) Se for para todas as linhas críticas então a forma do argumento é válida.
   (b) Se existir pelo menos uma linha crítica com conclusão falsa então a forma do argumento é inválida.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo:

$$p \vee (q \vee r);$$
$$\sim r;$$
$$\therefore \quad p \vee q.$$

- Tabela da verdade:

		p	q	r	$q \vee r$	Premissas: $p \vee (q \vee r)$	Premissas: $\sim r$	Conclusão: $p \vee q$
1.		V	V	V	V	V	F	V
2.	$\longrightarrow$	V	V	F	V	V	V	V
3.		V	F	V	V	V	F	V
4.	$\longrightarrow$	V	F	F	F	V	V	V
5.		F	V	V	V	V	F	V
6.	$\longrightarrow$	F	V	F	V	V	V	V
7.		F	F	V	V	V	F	F
8.		F	F	F	F	F	V	F

➜ Para todas linhas críticas a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é válido.

- Todas as linhas exceto as linhas críticas são irrelevantes para verificar a validade de um argumento.

Argumentos válidos e inválidos: Como analisar a validade

- Exemplo de um argumento inválido:

$$p \longrightarrow q \vee \sim r;$$
$$q \longrightarrow p \wedge r;$$
$$\therefore\ p \longrightarrow r;$$

								Premissas		Conclusão
		p	q	r	$\sim r$	$q \vee \sim r$	$p \wedge r$	$p \longrightarrow q \vee \sim r$	$q \longrightarrow p \wedge r$	$p \longrightarrow r$
1.	$\longrightarrow$	V	V	V	F	V	V	V	V	V
2.		V	V	F	V	V	F	V	F	
3.		V	F	V	F	F	V	F	V	
4.	$\longrightarrow$	V	F	F	V	V	F	V	V	**F**
5.		F	V	V	F	V	F	V	F	
6.		F	V	F	V	V	F	V	F	
7.	$\longrightarrow$	F	F	V	F	F	F	V	V	V
8.	$\longrightarrow$	F	F	F	V	V	F	V	V	V

➜ Para todas linhas críticas exceto a 4. a conclusão é verdadeira. Logo, o argumento é inválido.

Argumentos válidos: Modus Ponens

- Seja o seguinte argumento:

$p \longrightarrow q;$

$p;$

$\therefore \quad q.$

e um exemplo desta forma:

Se o último dígito de um $n^{\underline{o}}$ é 0 então este $n^{\underline{o}}$ é divisível por 10.

O último dígito deste $n^{\underline{o}}$ é 0.

$\therefore$ Este $n^{\underline{o}}$ é divisível por 10.

- Um argumento válido que tem esta forma é chamado de **modus ponens** em Latim e que significa "método de afirmar."

Argumentos válidos: Modus Ponens

- Exemplo:

			Premissas		Conclusão
	p	q	$p \longrightarrow q$	p	q
1. $\longrightarrow$	V	V	V	V	V
2.	V	F	F	V	F
3.	F	V	V	F	V
4.	F	F	V	F	F

Argumentos válidos: Modus Tollens

- Seja o seguinte argumento:

$$p \rightarrow q;$$

$$\sim q;$$

$$\therefore \sim p.$$

e um exemplo desta forma:

Se Zeus é humano então Zeus é mortal. (1)

Zeus não é mortal. (2)

$\therefore$ Zeus não é humano.

- Suponha que as afirmações (1) e (2) sejam verdadeiras.
  – Zeus deve ser necessariamente não-humano?
  – Sim!
  – Porque se Zeus fosse humano então de acordo com (1) ele seria mortal.
  – Mas por (2) ele não é mortal.
  – Desta forma, Zeus não pode ser humano.
- Um argumento válido que tem esta forma é chamado de <u>**modus tollens**</u> em Latim e que significa “método de negar.”

Argumentos válidos: Exemplos

- Se existem mais pássaros que ninhos
  então dois pássaros terão que chocar no mesmo ninho;

  Existem mais pássaros que ninhos;

$\therefore$ Dois pássaros chocam no mesmo ninho.

$\rightsquigarrow$ De acordo com modus ponens.

- Se este nº é divisível por 6
  então o nº é divisível por 2;

  Este nº não é divisível por 2;

$\therefore$ Este nº não é divisível por 6.

$\rightsquigarrow$ De acordo com modus tollens.

Outras formas de argumentos válidos: Adição disjuntiva

- As formas de argumentos

(a) $\begin{array}{l} p; \\ \therefore p \vee q. \end{array}$ (b) $\begin{array}{l} q; \\ \therefore p \vee q. \end{array}$

são válidas.

- Estas duas formas servem para fazer generalizações, i.e., se p é verdadeiro — caso (a) — então mais genericamente $p \vee q$ é verdadeiro para qualquer afirmação q.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- Silogismo = dedução formal tal que, postas duas premissas, delas se tira uma conclusão, nelas logicamente implicada.

- As formas de argumentos

(a) $$\begin{array}{l} p \vee q; \\ \sim q; \\ \therefore p. \end{array}$$ (b) $$\begin{array}{l} p \vee q; \\ \sim p; \\ \therefore q. \end{array}$$

são válidas.

- Estas formas de argumento expressam a situação onde existem somente duas possibilidades e uma pode ser excluída o que leva ao fato que a outra deve prevalecer.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo disjuntivo

- Exemplo: Seja x um número natural e os seguintes argumentos:

p: $x - 3 = 0$

q: $x + 2 = 0$

$p \vee q$: Um dos argumentos pode ser eliminado.

$\sim q$: $x \neq 2$. Sabe-se que x não é negativo e por essa razão é o argumento a ser eliminado.

$\therefore$ p, de acordo com o silogismo disjuntivo.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

- A forma de argumento

  $p \longrightarrow q$;

  $q \longrightarrow r$;

  $\therefore \quad p \longrightarrow r$.

  é válida.

- Muitos argumentos em matemática são definidos por cadeias de sentenças se–então, onde o primeiro implica no último.

Outras formas de argumentos válidos: Silogismo hipotético

- Exemplo:

  Se 18.486 é divisível por 18
  então 18.486 é divisível por 9;

  Se 18.486 é divisível por 9
  então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9;

  ∴ Se 18.486 é divisível por 18
  então a soma dos dígitos de 18.486 é divisível por 9.

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- Dilema = raciocínio cuja premissa é alternativa, de tal forma que qualquer dos seus termos conduz à mesma conseqüência.

- A forma de argumento

$$
\begin{array}{ll}
 & p \vee q; \\
 & p \longrightarrow r; \\
 & q \longrightarrow r; \\
\therefore & r.
\end{array}
$$

é válida.

Outras formas de argumentos válidos: Dilema: Prova por divisão em casos

- Exemplo:

  x é positivo ou x é negativo;

  Se x é positivo então $x^2 > 0$;

  Se x é negativo então $x^2 > 0$;

  $\therefore \quad x^2 > 0$.

- Neste caso já foi mostrado que existe uma dicotomia dos números reais: positivos, negativos ou zero. Por silogismo disjuntivo sabe-se x é positivo ou x é negativo e chega-se a conclusão acima.

Exemplo de dedução mais complexa

Você está saindo para a escola de manhã e percebe que não está usando os óculos. Ao tentar descobrir onde estão os óculos você começa a pensar sobre os seguintes fatos que são verdadeiros:

(a) Se os meus óculos estão na mesa da cozinha
então eu os vi no café da manhã;
(b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou
eu estava lendo o jornal na cozinha;
(c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar
então meus óculos estão na mesa do café;
(d) Eu não vi meus óculos no café da manhã;
(e) Se eu estava lendo um livro na cama
então meus óculos estão no criado-mudo;
(f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha
então meus óculos estão na mesa da cozinha;

Exemplo de dedução mais complexa

Sejam os seguintes argumentos:

$p =$ Os meus óculos estão na mesa da cozinha.

$q =$ Eu vi meus óculos no café da manhã.

$r =$ Eu estava lendo o jornal na sala de estar.

$s =$ Eu estava lendo o jornal na cozinha.

$t =$ Meus óculos estão na mesa do café.

$u =$ Eu estava lendo um livro na cama.

$v =$ Meus óculos estão no criado-mudo.

Exemplo de dedução mais complexa

Tradução dos comandos:

(a) $p \longrightarrow q$ (b) $r \vee s$ (c) $r \longrightarrow t$
(d) $\sim q$ (e) $u \longrightarrow v$ (f) $s \longrightarrow p$

As seguintes deduções podem ser feitas:

1.

	$p \longrightarrow q$;	(a)
	$\sim q$	(d)
$\therefore$	$\sim p$	Modus Tollens

2.

	$s \longrightarrow p$;	(f)
	$\sim p$	Conclusão de 1.
$\therefore$	$\sim s$	Modus Tollens

3.

	$r \vee s$;	(b)
	$\sim s$	Conclusão de 2.
$\therefore$	r	Silogismo disjuntivo

4.

	$r \longrightarrow t$;	(c)
	r	Conclusão de 3.
$\therefore$	t	Modus Ponens

$\therefore$ t é verdadeiro e os óculos estão na mesa do café.

Falácias

- Falácia = erro no raciocínio que resulta num argumento inválido.

- Falácias comuns:
  - Usar uma premissa vaga ou ambígua;
  - Assumir como verdadeiro o que deve ser provado;
  - Concluir uma premissa sem uma argumentação adequada;
  - Erro reverso;
  - Erro inverso.

- Como mostrar que um argumento é inválido?
  - Construir a tabela da verdade e achar uma linha crítica com a conclusão falsa.
  - Achar um argumento com premissas verdadeiras e conclusão falsa.

➜ Para um argumento ser válido, qualquer argumento da mesma forma que tem premissas verdadeiras deve ter uma conclusão verdadeira.

Erro reverso

- Se Zeca é um gênio
  então Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

  Zeca senta na primeira carteira na sala de aula;

  $\therefore$ Zeca é um gênio.

- A forma geral do argumento acima é:

  $p \longrightarrow q$;

  q;

  $\therefore$ p.

- Este argumento lembra a forma geral do argumento “Modus ponens.”

➜ Forma deste argumento é inválida.

Erro inverso

- Se as taxas de juro subirem
  então os preços das ações irão cair;

  As taxas de juro não estão subindo;

  $\therefore$ Os preços das ações não irão cair.

- A forma geral do argumento acima é:

  $p \longrightarrow q$;

  $\sim p$;

  $\therefore \ \sim q$.

- Este argumento lembra a forma geral do argumento “Modus tollens.”

➜ Forma deste argumento é inválida.

Validade $\times$ Verdade

- Validade é uma propriedade da forma de um argumento.

  ➜ Se um argumento é válido
  então também é todo argumento que tem a mesma forma.

- Exemplo de um argumento válido com uma conclusão falsa:

  Se John Lennon era uma estrela do rock
  então ele tinha cabelo ruivo;
  John Lennon era uma estrela do rock;
  $\therefore$ John Lennon tinha cabelo ruivo.

  ➜ Argumento válido de acordo com modus ponens. No entanto, a primeira premissa é falsa assim como a conclusão.

- Exemplo de um argumento inválido com uma conclusão verdadeira:

  Se Nova York é uma cidade grande
  então Nova York tem edifícios altos;
  Nova York tem edifícios altos;
  $\therefore$ Nova York é uma cidade grande.

  ➜ Argumento inválido (erro reverso) mas com a conclusão verdadeira.

Contradições e argumentos válidos

- Regra da contradição:

  Se pode ser mostrado que a suposição da afirmação "p = F" leva logicamente a uma contradição, então pode-se concluir que "p = V."

- $\sim p \rightarrow c$, onde c é uma contradição

  $\therefore p$.

- Tabela da verdade:

				Premissa	Conclusão
	p	$\sim p$	c	$\sim p \rightarrow c$	p
1. $\longrightarrow$	V	F	F	V	V
2.	F	V	F	F	F

Honestos × Desonestos

Exemplo de uma ilha que possui um dos dois tipos de pessoas:
– A diz: B é honesto.
– B diz: A e eu somos de tipos opostos.

Suponha que A é honesto.
∴ O que A diz é verdade;
∴ B também é honesto;
∴ O que B diz é verdade;
∴ A e B são de tipos honestos;
∴ Chegou-se a uma contradição:
A e B são honestos e A e B são desonestos.
∴ A suposição é falsa;
∴ A não é honesto;
∴ A é desonesto;
∴ O que A diz é falso;
∴ B não é honesto;
∴ B também é desonesto.